

Analytic Geometry

in Three Dimensions

For 2-nd Year Physical Science Students

By Ph.D Professor Doctor

Mounier Saied Morsee

**Professor of Pure Mathematics and Geometry
in the Faculty of Science, Ain Shams University**

Academic Year 1990

هندسة الأبعاد الثلاثة

Second year

إعداد

أ. د. منير سيد مرسى . د. هدى محمد عبد الباسط

كلية البنات

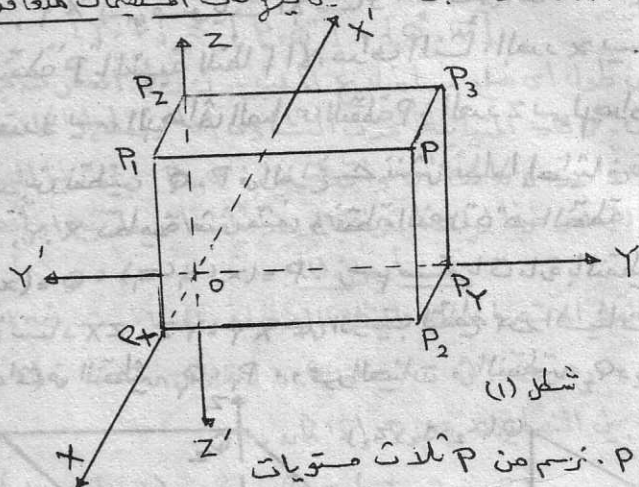
كلية العلوم

جامعة عين شمس

الباب الأول

مقدمة في النظم الإحداثية

بما أنه يوجد تماثل (متطابقا) بين نقاط الفراغ و مجموعة الدلائل المرتبة من الأعداد الحقيقية R^3 . لذلك نرسم ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة واحدة (ليس من الضروري أن تكون هذه المستقيمات متعامدة). نعرف هذه المستقيمات بالرمز X, Y, Z ولنقطة التقاطع بالرمز O والتي سوف نعتبرها كنقطة أصل لنظام إحداثيات على تلك المستقيمات. تعين المستقيمات الثلاثة X, Y, Z ثلاث مستويات هم على الترتيب OXY, OYZ, OZX . ولنعتبر الحالة التي فيها تلك المستقيمات متعامدة مثلثي متين



نفرض أن $P \in \pi$. نرسم من P ثلاث مستويات متوازية للمستويات OXY, OYZ, OZX لتقطع المستقيمات X, Y, Z على الترتيب في النقاط P_X, P_Y, P_Z . نفرض أنه $P_X = (x), P_Y = (y), P_Z = (z)$ بالنسبة للنظام الإحداثيات المنشأة. حيث أنه لكل الممرد بهذه المستويات الثلاثة (أي الأصل الذي رؤوسه النقاط $P, P_X, P_Y, P_Z, P'_X, P'_Y, P'_Z, P''_X, P''_Y, P''_Z$) يكون متوازي سطوح

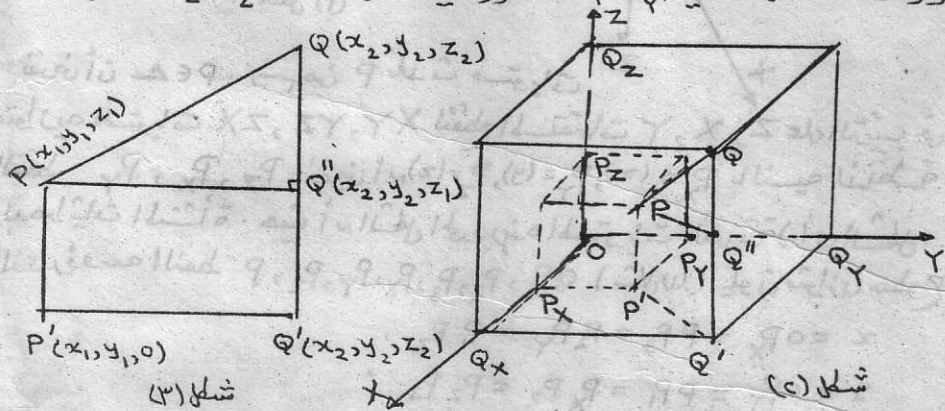
$$x = OP_X = PP_3 = P_2 P_Y = P_1 P_Z,$$

$$y = OP_Y = PP_1 = P_X P_2 = P_Z P_3,$$

$$z = OP_Z = P_2 P = P'_X P_1 = P_Y P_3.$$

من هنا نرى أن الترتيب المرتب (z, y, x) يمكن أن يقرن بالنقطة P . وبالعكس، إذا كان لدينا الترتيب المرتب (z, y, x) وكانت P_X, P_Y, P_Z النقاط على مستقيمات X, Y, Z حيث $P_X = (x), P_Y = (y), P_Z = (z)$ بالنسبة للنظام الإحداثيات المنشأة فإننا

نجد أن المستويات المارة بهذه النقط موازية لمستويات XY ، ZX ، YZ على الترتيب تتقاطع في نقطة واحدة P . من هنا يتبين أن المتطابقات $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{A} : \mathcal{F}$ إذا كانت $(P, (x, y, z)) \in \mathbb{A} \times \mathbb{R}^3$ ، حيث (x, y, z) صورة P بالتقابل $\mathcal{F}$.
 فسنعتبر هنا كتابة على الصورة $P \equiv (x, y, z)$. في هذه الحالة نقول أننا أنشأنا نظام إحداثيات في الفراغ $\mathbb{A}$. النقطة O تسمى نقطة الأصل للنظام الإحداثي. المستقيمات Z ، Y ، X تسمى محاور الإحداثيات. المستقيم X يسمى محور السينات، المستقيم Y يسمى محور الصادات، المستقيم Z يسمى محور العيinat. المستويات XY ، YZ ، ZX تسمى مستويات الإسناد. كما تسمى الأعداد الحقيقية x ، y ، z بإحداثيات النقطة P بالنسبة للنظام الإحداثي المنشأ. العدد x يسمى الإحداثي السيني للنقطة P ، والعدد y يسمى الإحداثي الصادي للنقطة P ، والعدد z يسمى الإحداثي العيني للنقطة P .
 ليوجد البعدين نقطتين P ، Q في الفراغ $\mathbb{A}$ ننشئ نظاماً إحداثياً في هذا الفراغ تكون فيه المحاور X ، Y ، Z متعامدة متنى متنى ونقطة الأصل O هي النقطة $(0, 0, 0)$. نفرض أن $P = (x_1, y_1, z_1)$ ، $Q = (x_2, y_2, z_2)$. نرسم مستويات مارة بالنقطتين P ، Q موازية لمستويات الإسناد XY ، YZ ، ZX على الترتيب لتقطع محاور السينات في النقطتين P_x ، Q_x ومحاور الصادات في النقطتين P_y ، Q_y ومحاور العيinat في النقطتين P_z ، Q_z (شكل (٣)).



يرتبط الحصول على متوازي متطيلات أحدهما له الرأسين المتضادين P ، O وثانيهما له الرأسين المتضادين Q ، O . ضلعي متوازي المتطيلات المارة بالنقطتين P ، Q موازيين لمحور العيinat يقطعان المستوى XY في النقطتين P'_x ، Q'_x على الترتيب. كذلك المحور المار بالنقطة P موازياً للمستوى XY يقطع الضلع $Q'_x Q'_y$ في النقطة Q''_x . حيث الضلع $Q'_x Q'_y$

عمودي على المستوى XY فإن PQ'' يكون عموديا على الضلع $Q'Q$ (شكل (١٣)) حيث أن $P' = (x_1, y_1, 0)$ ، $Q' = (x_2, y_2, 0)$ فإن

$$[P, Q''] = [P', Q'] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

كذلك $[Q, Q''] = [P_2, Q_2] = |z_2 - z_1|$ من نظرية فيثاغورث ينتج أن :

$$[P, Q] = \sqrt{[P, Q'']^2 + [Q'', Q]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

علما بأنه الرمز $[,]$ هو دالة البعد : $[,] : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$

و يحق المتباينة $[P, Q] \leq [P, Q''] + [Q'', Q]$

وهو تعني أن طول أي ضلع من أضلاع المثلثات رافعا أصغر من مجموع طول الضلعين الآخرين للمثلث. ف هذه المتباينة تحدث التساوي إذا وفقط إذا كانت النقط P, Q, P'' على استقامة واحدة وكانت Q'' واقعة بين P, Q . ويجدر بنا الإشارة إلى أن البصائيات التي تعرضنا لها هنا تعرف بالبصائيات الريكارتية أو البصائيات لحارتييه.

تمارين (١١)

١- عين كل من النقط الآتية إذا كانت النظام البصري المنشأ في فيه المحاور متعامدة

$(6, 0, 0)$ ، $(0, 0, 0)$ ، $(0, -2, -4)$ ، $(5, -1, -2)$ ، $(3, 0, 8)$

٢- أوجد البعد بين النقطتين P, Q إذا كان :

(i) $P = (4, -1, 2)$ ، $Q = (7, 2, -3)$.

(ii) $P = (3, -1, 2)$ ، $Q = (-1, 2, 4)$.

(iii) $P = (3, 2, -1)$ ، $Q = (-3, -2, 1)$.

٣- أوجد مجموعة نقط الفراغ التي بعد كل منها نفس وحدات عن محور العينات - ماهر الشكل الهندسي الذي تحمله هذه المجموعة ؟

٤- أوجد مجموعة نقط الفراغ التي تبعد كل منها نفس البعد عن كل من النقطتين

$P = (5, 2, 2)$ ، $Q = (8, 5, 4)$. ماهر الشكل الهندسي الذي تحمله هذه المجموعة ؟

٥- أوجد المجموعة $\{P = (x, y, z) : [P, Q] = [P, Q']\}$ حيث

$Q = (2, 6, -5)$ ، $Q' = (x, 0, z)$

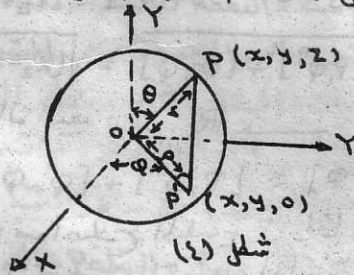
-٢-

بالإضافة إلى تمثيل النقطة P في $\mathbb{R}^3$ بدلالة الإحداثيات الكارتيزية (x, y, z) فإنه يمكن تمثيلها بنوعين آخرين من الإحداثيات وهما :

١- الإحداثيات الكرية (منه إلى كرة نصف قطرها $\infty < r$)

٢- الإحداثيات الأسطوانية (منه إلى أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها $\infty < \rho$)

و سوف نوضح التمثيل (١)، (٢)، (٣) بالطريق البياني (كما في شكل (١))



يتضح من الشكل ما يلي :

$P \in \mathbb{R}^3$ بالإحداثيات الكرية $(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ حيث

$0 < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ وتسمى φ بزاوية الدوران حول z

$P \in \mathbb{R}^3$ بالإحداثيات الأسطوانية $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ حيث

$0 < \rho < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

كما يوجد الربط التحويلي بين الإحداثيات الثلاث على النحو التالي

$$(i) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi ; y = r \sin \theta \sin \varphi ; z = r \cos \theta$$

$$x = \rho \cos \varphi ; y = \rho \sin \varphi ; z = z$$

$$(ii) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} ; \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} ; \theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z} ; \varphi = \varphi$$

$$(iii) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} ; \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} ; z = z$$

$$\rho = r \sin \theta ; \varphi = \varphi ; z = r \cos \theta$$

الباب الثاني

المتجهات

من المفيد دائما أن نفرق بين نوعين من الكميات الفيزيائية ، على وجه التحديد الكميات القياسية والمتجهات التي تظهر في كثير من المائل . الكمية القياسية كمية نعين تماما بعدد حقيقي مفرد هو مقدار الكمية المعنية . فكميات مثل الطول ، الزمن ، درجات الحرارة ، الحجم ، الكتله أمثلة لكميات قياسية . من ناحية أخرى ، المتجه كمية تحدد بشئين هما المقدار والاتجاه . السرعة الجسم متحرك مثال كمية متجهه حيث مقدارها هو عدد الكيلومترات التي يقطعها الجسم المتحرك في الساعة واتجاهها هو الاتجاه الذي يتحرك فيه الجسم . القوة مثال آخر لكمية متجهه حيث مقدارها يقاس بمدى تأثيرها واتجاهها هو اتجاه تأثيرها . أيضا المجال المغناطيسي للأرض عند نقطة معينة على سطح الأرض مثال لكمية متجهه مقدارها هو شدة المجال واتجاهها هو الاتجاه المبين بإبرة بوصلة

بند (١١) : المتجهات ثلاثية البعد وخصائصها القياسية :

من دراستنا السابقة لحاصل الضرب المتري للجمعية $\mathbb{R}^3$ على أنها مجموعة المتجهات المرتبة (x, y, z) حيث $x, y, z \in \mathbb{R}$ أي أن

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

تعريف (١٠١) : لكل $P = (x_1, y_1, z_1)$ و $Q = (x_2, y_2, z_2)$ في $\mathbb{R}^3$ يعرف مجموع $P + Q$

$$P + Q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{على أنه}$$

تعريف (١٠٢) : لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ يعرف حاصل الضرب

$$\lambda P = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{على أنه}$$

الجمعية $\mathbb{R}^3$ مع عملية الجمع المعرفة في تعريف (١٠١) ، وعملية الضرب المعرفة في

تعريف (١٠٢) تسمى فراغ اتجاه ثلاثي البعد . وعناصر هذا الفراغ تسمى متجهات ثلاثية البعد .

في هذه الحالة يكون العنصر المحايد الجمعي هو المتجه $\vec{0} = (0, 0, 0)$ والعكس

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ هو المتجه } -\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3).$$

تعريف (١٠٣) : المتجهان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ يكونان متساويين

$$\text{إذا وفقط إذا كان } a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3 \text{ أي أن}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 = b_3.$$

$$\text{إذا كان } \vec{i} = (1, 0, 0) ; \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ و } \vec{k} = (0, 0, 1)$$

وهي ما تعرف بمتجهات الوحدة المقاسة على محور الإحداثيات المتعامدة في $\mathbb{R}^3$. كما تعرف

الأعداد الحقيقية a_1, a_2, a_3 بمركبات المتجه $\vec{a}$ من اتجاه المتجهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ على الترتيب. نستنتج من هذا أن أي متجه $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ارتباط خطي مع المتجهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ، $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

تعريف (١.٤): إذا كان $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ فإن حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ يعرف على أنه العدد الحقيقي:

فإذا كان لدينا المجموعة $\{a_i \in \mathbb{R} : i=1, \dots, n\}$ فإن n is even عدد قسيمي $\vec{a}_i = \lambda \vec{a}_i$ إذا كان n is odd عدد قسيمي $\vec{a}_i = \lambda \vec{a}_i$ ، $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^3$ فإن طول $\vec{a}$ يرمز له بالرمز $\|\vec{a}\|$ ويعرف كالتالي:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \odot \vec{a}}$$

من هذا التعريف نرى أنه (iii) $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ ، (ii) $\|\vec{a}\| > 0$

$$(iii) \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

تعريف (١.٦): أي متجه طوله الواحد الصحيح يسمى متجه وحدة.

تعريف (١.٧): إذا كان $\vec{a} \neq \vec{0}$ فإن المتجه $\vec{a}/\|\vec{a}\|$ يكون متجه وحدة، يسمى متجه الوحدة من اتجاه المتجه $\vec{a}$ ، ويرمز له بالرمز $\hat{\vec{a}}$.

عملية الضرب القياسي لمتجهين تحقق الخصائص التالية (خاصية الإبدال):

$$(i) \vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

$$(ii) \vec{a} \odot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \odot \vec{b} + \vec{a} \odot \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ و } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \vec{a} \odot \vec{0} = \vec{0} \odot \vec{a} = \vec{0}, \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$(v) \vec{a} \odot \vec{b} = \vec{a} \odot \vec{c} \iff \vec{b} = \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

تعريف (١.٨): يقال لمجموعة المتجهات $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^3$ أنها مستقلة خطياً إذا كان

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

خلاف ذلك يقال أنها مرتبطة خطياً.

أنه ترضيه: $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (2, 4, 5)$ متعلقان خطياً وذلك لأن:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0} \implies \lambda_1 (1, 2, 3) + \lambda_2 (2, 4, 5) = (0, 0, 0) \implies$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, 3\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0, 0, 0) \implies$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \text{ و } 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

المجموعان $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (2, 4, 6)$ مرتبطان خطياً وذلك لأن:

$$2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \implies \lambda_1 = 2 \neq 0 \text{ و } \lambda_2 = -1 \neq 0$$

مثال (٣): المتجهات $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$ و $\vec{c} = (0, 1, 4)$ متعلقه خطيا وذلك لأن

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(1, 0, 2) + \lambda_3(0, 1, 4) = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0, 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

بحل هذه المعادلات الثلاث في $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ نجد أن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

مثال (٤): المتجهات $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1, 8)$ مرتبطة خطيا وذلك لأن

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, \lambda_2 + \lambda_3 = 0, 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$$

هذه المعادلات لها عدد لا نهائي من الحلول مثلا: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ أي أن

$$2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

نظرية (١.١): الشرط الضروري والكافي لكي يكون المتجهان $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ متعلقين خطيا هو:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0, a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$$

أي أن المتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ يكونان مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$$

البرهان: نفرض أولا أن $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0, a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1a_1 + \lambda_2b_1) + (\lambda_1a_2 + \lambda_2b_2) + (\lambda_1a_3 + \lambda_2b_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\lambda_1a_1 + \lambda_2b_1 = 0, \lambda_1a_2 + \lambda_2b_2 = 0, \lambda_1a_3 + \lambda_2b_3 = 0$$

بحل أي اثنين من المعادلات الثلاثة الأخيرة في λ_1, λ_2 نجد أن

$$\lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \text{ و } \lambda_2(a_2b_1 - a_1b_2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{لأن } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

أي أن $\vec{a}, \vec{b}$ متعلقين خطيا

بالعكس إذا كان $a_1b_2 - a_2b_1 = 0, a_2b_3 - a_3b_2 = 0, a_1b_3 - a_3b_1 = 0$

فإنه يوجد عدد $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ بحيث $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3 = \lambda$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) = \lambda \vec{b}$$

$$\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0} \text{ و } \lambda \neq 0$$

أي أن $\vec{a}, \vec{b}$ مرتبطان خطيا

-٨-
بتطبيق هذه النظرية على مثال (١) و (٢) و (٣) نلاحظ في مثال (١) أن

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (1)(4) - (2)(2) = 0, \quad a_2 b_3 - a_3 b_2 = (2)(5) - (2)(4) = -2 \neq 0$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = (1)(5) - (3)(2) = -1 \neq 0$$

إما في مثال (٢) فإن

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (1)(4) - (2)(2) = 0$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = (2)(6) - (3)(4) = 0, \quad a_1 b_3 - a_3 b_1 = (1)(6) - (3)(2) = 0$$

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3 = 1/2$$

مما يوضح نظرية (١.٢): الشرط الضروري والخاص لكي تكون ثلاثة متجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متعلقة خطياً هو:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

البرهان: تمرين

بتطبيق هذه النظرية على مثال (١) و (٢) و (٣) نلاحظ في مثال (٣) أن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

إما في مثال (٤) فإن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (٥): هل المتجهات $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, 4, 6), \vec{c} = (1, 0, 2)$

متعلقة خطياً أم مرتبطة خطياً؟

الحل:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 - 12 = 0$$

هذه المتجهات مرتبطة خطياً.

مما يوضح نظرية (١.٢): أي أربعة متجهات في الفراغ $\mathbb{R}^3$ تكون مرتبطة خطياً

البرهان: نفرض أن المتجهات الأربعة هي $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ بحيث يكون كل ثلاث منهم متعلقة خطياً.

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad \dots (1)$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} \quad \dots (2)$$

$$\vec{c} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \quad \dots (3)$$

بحل المعادلات (1), (2), (3) للحصول على $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بدلالة كل من $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & a_2 & a_3 \\ \vec{b} & b_2 & b_3 \\ \vec{c} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \vec{a} & a_3 \\ b_1 & \vec{b} & b_3 \\ c_1 & \vec{c} & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vec{a} \\ b_1 & b_2 & \vec{b} \\ c_1 & c_2 & \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{i} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a} & a_2 & a_3 \\ \vec{b} & b_2 & b_3 \\ \vec{c} & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \vec{j} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \vec{a} & a_3 \\ b_1 & \vec{b} & b_3 \\ c_1 & \vec{c} & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \vec{k} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vec{a} \\ b_1 & b_2 & \vec{b} \\ c_1 & c_2 & \vec{c} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

وهي ليست تساوي الصفر لذات المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متطبة خطيا.

وبما أن

$$\vec{d} = d_1 \vec{i} + d_2 \vec{j} + d_3 \vec{k}$$

$$= \frac{d_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \vec{a} & a_2 & a_3 \\ \vec{b} & b_2 & b_3 \\ \vec{c} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \frac{d_2}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & \vec{a} & a_3 \\ b_1 & \vec{b} & b_3 \\ c_1 & \vec{c} & c_3 \end{vmatrix} + \frac{d_3}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vec{a} \\ b_1 & b_2 & \vec{b} \\ c_1 & c_2 & \vec{c} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{a} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{b} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \vec{c} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \vec{d} = \vec{0}$$

حيث معاملات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ليست تساوي الصفر

∴ المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ تكون مرتبطة خطيا.

+

مثال إذا كان $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (1, 0, 2), \vec{c} = (0, 1, 4) \text{ و } \vec{d} = (5, 2, 4)$ فإن السهل التحقق أن $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$

-10-

نظرية (١.٤): (متباينة كوشي - شوارتز)

$$|\vec{a} \odot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

البهان: إذا كان $\vec{a} \vee \vec{b}$ هوالمتجه الصفري فإن

$$|\vec{a} \odot \vec{b}| = 0 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

لذلك نفرض أنه $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ من المعلوم أن

$$0 \leq \|\vec{a} + \lambda \vec{b}\| = (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \odot (\vec{a} + \lambda \vec{b})$$

$$= \vec{a} \odot \vec{a} + 2\lambda \vec{a} \odot \vec{b} + \lambda^2 \vec{b} \odot \vec{b} \quad (1)$$

إذا وضعنا $\lambda = -\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{\vec{b} \odot \vec{b}}$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن (1) تصبح

$$0 \leq \|\vec{a}\|^2 - 2 \frac{(\vec{a} \odot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} + \frac{(\vec{a} \odot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \odot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2}$$

$$\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \odot \vec{b})^2 \geq 0 \quad \text{أي أن}$$

$$\therefore |\vec{a} \odot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

فمثلا، إذا كان $\vec{a} = (3, 2, 1), \vec{b} = (1, -4, 0)$ فإن

$$|\vec{a} \odot \vec{b}| = |(3)(1) + 2(-4) + (1)(0)| = |1 - 5| = 5$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}, \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \Rightarrow \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = \sqrt{238}$$

$$\therefore |\vec{a} \odot \vec{b}| = 5 < \sqrt{238} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ مرتبطان خطيا فإنه يوجد عدد حقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث أن

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \quad \text{وبالتالي فإن}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{a} \odot \vec{b}| &= |\lambda \vec{b} \odot \vec{b}| = |\lambda| \|\vec{b}\|^2 \\ \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| &= \|\lambda \vec{b}\| \|\vec{b}\| = |\lambda| \|\vec{b}\|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\vec{a} \odot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

من هنا نرى أنه التساوي في متباينة كوشي - شوارتز يحدث إذا و فقط إذا كان

$\vec{a}, \vec{b}$ مرتبطان خطيا. أما في حالة عدم التساوي فما مستقرن خطيا

وذلك لأنه $\vec{a} + \lambda \vec{b} \neq \vec{0}$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ وبالتالي فإن

$$\|\vec{a} + \lambda \vec{b}\| > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

غير
وكل
بالدوام

}

فمثلاً إذا كان $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (3, 6, 9)$ فإن $\vec{a}, \vec{b}$ يكونان مرتبطان خطياً
 (بما أن $\vec{b} = 2\vec{a}$) - في هذه الحالة نلاحظ أن

$$|\vec{a} \circ \vec{b}| = 42, \|\vec{a}\| = \sqrt{14}, \|\vec{b}\| = \sqrt{126} \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = \sqrt{14} \sqrt{126} = \sqrt{1764} = 42 = |\vec{a} \circ \vec{b}|.$$

من متباينة كوش-شيفارز نجد أن

$$\frac{|\vec{a} \circ \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \leq 1.$$

نفرض أنه "θ" زاوية ما بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (الزاوية θ تسمى الزاوية بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$)

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \quad \dots \quad (I)$$

مثال (٦): أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a} = (0, 1, 1)$ و $\vec{b} = (2, 2, 0)$

الحل: $\vec{a} \circ \vec{b} = (0)(2) + (1)(2) + (1)(0) = 2, \|\vec{a}\| = \sqrt{2}, \|\vec{b}\| = 2\sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}(2\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

مثال (٧): أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a} = (2, -2, 0)$ و $\vec{b} = (0, 3, 3)$

الحل: $\vec{a} \circ \vec{b} = -6, \|\vec{a}\| = 2\sqrt{2}, \|\vec{b}\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\cos \theta = \frac{-6}{(2\sqrt{2})(3\sqrt{2})} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

ملاحظات:

١- إذا كان المتجهان $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ يحصران زاوية

(أ) حادة فإن $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$ ذلك أنه في هذه الحالة $0 < \theta < 90^\circ$

(ب) منفرجة فإن $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$ ذلك أنه في هذه الحالة $90^\circ < \theta < 180^\circ$

(ج) قائمة فإن $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ ذلك أنه في هذه الحالة $\theta = 90^\circ$

٢- يقال أن المتجهين $\vec{a} \parallel \vec{b}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{a} = \lambda \vec{b}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. إذا كان $\lambda > 0$ فإنه يقال أن المتجهين لهما نفس الاتجاه، أما إذا كان $\lambda < 0$ فيكونان اتجاهين متضادين. في هذه الحالة نجد أن

$$\cos \theta = \frac{\lambda \vec{b} \circ \vec{b}}{\|\lambda \vec{b}\| \|\vec{b}\|} = \frac{\lambda \|\vec{b}\|^2}{|\lambda| \|\vec{b}\|^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1 & \text{إذا } \lambda > 0 \\ -1 & \text{إذا } \lambda < 0 \end{cases}$$

أي أن قياس θ بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يكون صفراً في حالة توازيهما ولهما نفس الاتجاه ويكون 180° في حالة التوازي مع التصادم في الاتجاه

مثال (٨) : إثبات أن

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

الحل

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 \quad (\text{باستخدام متباينة كوشي - شوارتز})$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

ويلدفع أن التساوي يحدث في مثال (٨) إذا وفقط إذا وجد عدد $\lambda > 0$: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ،
وهو حالة الارتباط الخطي أما في حالة عدم التساوي فيها متصلتين خطياً .

تعريف (١٠٩) : نفرض أن $P, q \in \mathbb{E}$. القطعة المستقيمة $[Pq]$ هي المجموعة التي
عناصرها P, q وكل النقط الواقعة على المستقيم Pq والمحصورة بين P, q . القطعة
المستقيمة الموجهة من P إلى q ، ويرمز لها بالرمز $\vec{Pq}$ هي القطعة المستقيمة
التي تبدأ من P وتنتهي عند q .

تعريف (١١٠) : يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين $\vec{P_1q_1}$ ، $\vec{P_2q_2}$ أنهما متكافئتين إذا
كان لهما نفس الطول والاتجاه

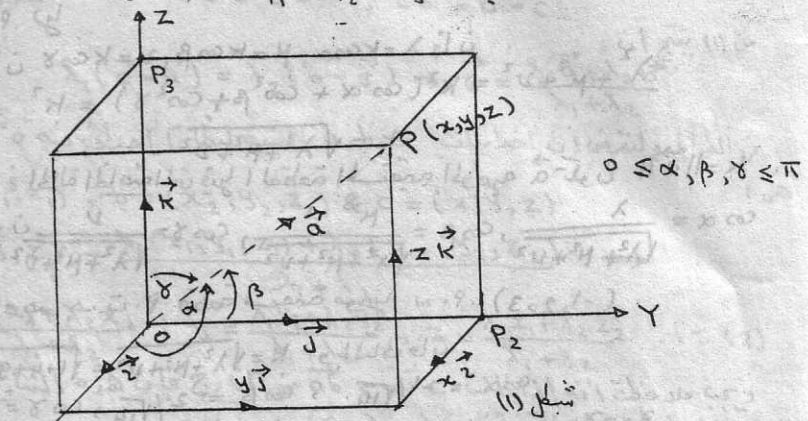
بما أنه كل قتيه يمكن تمثيله هندسياً بقطعة مستقيمة موجهة طولها واتجاهها
هما طول واتجاه القتيه . بهذا يمكن تمثيل أي قتيه معطى بالعديد من القطع المستقيمة
الموجبة وذلك حيث أن موقع القطعة المستقيمة في $\mathbb{R}^3$ ليس محددًا ولكن المجردهو
فقط طولها واتجاهها ، أي قطعتين مستقيمتين موجهتين متكافئتين تمثلونه نفس القتيه .
وبالعكس إذا كانت القطعة المستقيمة $\vec{P_1q_1}$ تمثل قتيه معلوم فإنه يمكن تمثيل نفس القتيه
أيضاً بأي قطعة مستقيمة موجهة $\vec{P_2q_2}$ مكافئة للقطعة المستقيمة الموجهة $\vec{P_1q_1}$.

دعنا نفرض الآن أن جميع المتجهات السديئة البعد n تمثل تقطع مستقيمة تقع
في فراغ ثابت . إذن من الممكن تعيين إحداثيات لنقطتي بداية ونهاية القطعة المستقيمة
لدى قتيه . نفترض أننا أنشأنا نظاماً للإحداثيات في هذا الفراغ فيه محاور متعامدة

لنستخدم الإحداثيات الكارتيزية عند التعامل مع المتجهات من المفيد أن
نعرف قتيهات الوحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ على امتداد محاور البعد x, y, z على
الترتيب . إذا كانت $P \in \mathbb{E}$ ، نقطة الأصل لهذا النظام . فإن القطعة المستقيمة

الموجه $\vec{OP}$ تسمى متجه الموضع للنقطة P في $\mathbb{R}^3$. إذا كان $\vec{a}$ هو الموجه
الممثل بالقطعة المستقيمة الموجهة $\vec{OP}$ فإنه يمكننا كتابة
$$\vec{a} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

هذه النتيجة تستج من حقيقة أن المتجهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ تخرج من نقطة المصلة إلى نقطة
المستطيلات الذي أضلاعه المتجاورة $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ كما في شكل (١).



إذا كانت $P = (x_1, y_1, z_1)$ ، $Q = (x_2, y_2, z_2)$ أي نقطتين في $\mathbb{R}^3$
فإن القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{PQ}$ تكتب على الصورة $\vec{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
الموجه $\vec{a}$ (انظر شكل (١)) يمكن تمثيله بأي قطعة مستقيمة موجهة مكافئة لمتجه الموضع
 $\vec{OP}$ ونقطة برأيتل أي نقطة في $\mathbb{R}^3$ كما أنه يمكن أيضا تمثيل الموجه $\vec{a}$ بالقطعة المستقيمة
الموجهة $\vec{PQ}$ حيث $Q = (x + x_0, y + y_0, z + z_0)$ ، $P = (x_0, y_0, z_0)$ ويجب ملاحظة
أنه بالرغم من أن الموجه $\vec{a} = (x, y, z)$ يمكن تمثيله هندسيا بأكثر من قطعة مستقيمة
موجهة إلا أنه يوجد متجه واحد بالضبط متناظر للموجه $\vec{a}$. وسوف يكون متجه
الموضع لأي نقطة في $\mathbb{R}^3$ متواليا للنقطة O دائما إلى غير حالة ذكر خلاف ذلك.

تعريف (١.١١): تعرف زوايا اتجاه (α, β, γ) متجه غير صفري $\vec{a}$ على أنها أصغر زوايا غير
سالبة يصنعها متجه الموضع $\vec{OP}$ المتناظر للموجه $\vec{a}$ مع الاتجاهات الموجهة لمحاور الإحداثيات
حيث تمام زوايا اتجاه الموجه $\vec{a}$ تسمى جيوب تمام اتجاه الموجه $\vec{a}$ (ج.ت. ١.١).
ليكن $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ هو الموجه الموضع في شكل (١) الذي زوايا اتجاهه α, β, γ
يمكن بسهولة التحقق من أن $\cos \alpha = x / \|\vec{a}\|$ ، $\cos \beta = y / \|\vec{a}\|$ ، $\cos \gamma = z / \|\vec{a}\|$

أي أن

$$x = \|\vec{a}\| \cos \alpha, y = \|\vec{a}\| \cos \beta, z = \|\vec{a}\| \cos \gamma$$

إذا يمكن التعبير عن المتجه $\vec{a}$ بدلالة طول له وج. ت. ٢٠. على الصورة

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$$

تعريف (١٠١٤): إذا كانت $k > 0$ فإن الأعداد λ, μ, ν المعرفة كالتالي
 $\lambda = k \cos \alpha, \mu = k \cos \beta, \nu = k \cos \gamma$ تسمى لُب اتجاه (ن. ٢٠) المقطعة المقتضية الموجبة

$\vec{PQ}$ التي زوايا اتجاهها α, β, γ . يجب ملاحظة أنه إذا علمت ن. ٢٠ قطعة مستقيمة موجبة فإنه يمكن تعيينه ج. ت. ٢٠. وبالتالي ز. ٢٠. لي

$$\text{نفرض أن } \lambda = k \cos \alpha, \mu = k \cos \beta, \nu = k \cos \gamma \text{ فإن}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = k^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = k^2 \Rightarrow$$

$$k = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

نلاحظ أنه في الحالة الخاصة التي فيها المقطعة المقتضية الموجبة $\vec{a}$ تكون $k = \|\vec{a}\|$

$$\text{وبالتالي يكون } \cos \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}, \cos \beta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}, \cos \gamma = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}$$

مثال (٩): أوجد ج. ت. ٢٠ قطعة مستقيمة موجبة P, N . $(-1, 2, 3)$.

$$\text{الحل: } k = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos \alpha = -1/\sqrt{14}, \cos \beta = 2/\sqrt{14}, \cos \gamma = 3/\sqrt{14}$$

$$\text{ملحوظة: المعادلات } \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{[P, q]}, \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{[P, q]}, \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{[P, q]}$$

تبين أنه الأعداد $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ تكون P, N المقطعة المقتضية الموجبة $\vec{PQ}$

تعريف (١٠١٣): ج. ت. ٢٠ قطعة مستقيمة غير موجبة $[P, q]$ هر ج. ت. ٢٠ أي

من المقطعتين المقتضيتين الموجبتين $\vec{PQ} \vee \vec{QP}$. P, N . $[P, q]$ هر زوجة الأعداد

التي تتناسب مع ج. ت. ٢٠. لي

مثال (١١): أوجد ج. ت. ٢٠ المقطعة المقتضية الغير موجبة الواقعة بين النقطتين

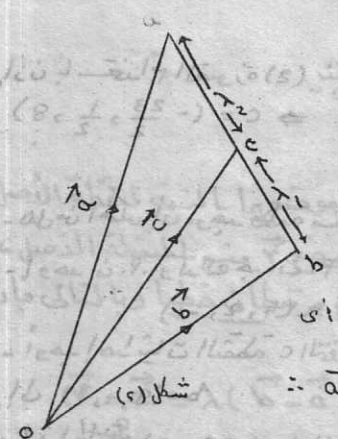
$$P = (3, -2, 1), q = (-1, 2, 4)$$

$$\text{الحل: } [P, q] = \sqrt{41} \text{ ج. ت. ٢٠. } \vec{PQ}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1-3}{\sqrt{41}} = -4/\sqrt{41}, \cos \beta = 4/\sqrt{41}, \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{41}}$$

$$\text{و ج. ت. ٢٠. } \vec{QP} \text{ هي } \cos \alpha' = 4/\sqrt{41}, \cos \beta' = -4/\sqrt{41}, \cos \gamma' = -3/\sqrt{41}$$

و ج. ت. ٢٠ المقطعة المقتضية الغير موجبة $[P, q]$ هر ج. ت. ٢٠. $\vec{PQ} \vee \vec{QP}$



بند (٢) : قسمة قطعة مستقيمة من الداخل أو من الخارج :

نفرض أن c نقطة على القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{ab}$ ،
ونفرض أن c تقسم $\vec{ab}$ بنسبة $\lambda_2 : \lambda_1$ أي أن

$$\lambda_1 \vec{ac} = \lambda_2 \vec{cb} \quad (1)$$

لنفرض أن $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ هي المتجهات المثلثة بالقطع
المستقيمة الموجهة $\vec{ac}$ و $\vec{ob}$ و $\vec{oa}$ على الترتيب حيث o أي
نقطة من Δ

$$\therefore \vec{ac} = \vec{c} - \vec{a} , \vec{cb} = \vec{b} - \vec{c}$$

من (1) ينتج أن :

$$\lambda_1 (\vec{c} - \vec{a}) = \lambda_2 (\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{c} = \frac{\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

في الفراغ ونفرض أن إحداثيات a, b, c بالنسبة لنظام إحداثي فيه o نقطة المأصل هي :

$$a = (x_1, y_1, z_1) , b = (x_2, y_2, z_2) \text{ و } c = (x, y, z)$$

$$\therefore (x, y, z) = \frac{\lambda_1 (x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 (x_2, y_2, z_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} ; y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2} ; z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2)$$

ويجب ملاحظة أنه إذا كانت c تقسم $\vec{ab}$ من الخارج فإن هذه النتائج ستكون صحيحة كذلك إذا كان إحدى القيمتين λ_1, λ_2 سكون سالب

مثال (11) : أوجد إحداثيات النقطة c التي تقع في ربع الطريق من a إلى b حيث

$$a = (7, 4, -2) , b = (3, 2, 5)$$

الحل : بما أن النقطة c تقسم القطعة ab داخليا بنسبة $\lambda_2 : \lambda_1$ حيث $\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 3$ إذن باستعمال

الصورة (2) ينتج أن

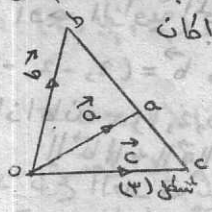
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{3(7) + 1(3)}{3 + 1} = \frac{24}{4} = 6 \\ y &= \frac{3(4) + 1(2)}{3 + 1} = \frac{14}{4} = 7/2 , \quad z = \frac{3(-2) + 1(5)}{3 + 1} = \frac{-1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = (6, 7/2, -1/4)$$

مثال (١٢) : أوجد النقطة c التي تقع على الشعاع $\vec{oa}$ في الاتجاه المضاد لـ $\vec{oa}$ باتجاه القطعة المستقيمة الموجهة $\vec{ab}$ والتي بعدها عن b يساوي ثلثية أمثال بعدها عن a إذا كان

$$a = (-7, 2, 5) \text{ و } b = (2, 5, -1)$$

$$\text{الحل : من المعطيات ينتج أن } 3\vec{ca} = \vec{cb} \Rightarrow -3\vec{ac} = \vec{cb}$$

أي أن $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$ ومن أن c تقسم $\vec{ab}$ من الخارج



اذن باستخدام الصورة (2) ينتج ان

$$x = \frac{(-3)(-7) + 11(2)}{-3+1} = -\frac{23}{2}; y = \frac{1}{2}; z = 8 \Rightarrow c = (-\frac{23}{2}, \frac{1}{2}, 8)$$

تمارين (٤)

١- هل من الممكن ان توجد قطعة مستقيمة موجهة بحيث تكون $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 45^\circ$ ؟

٢- اوجد ث. ٩. وكذلك ج. ث. ٩. للقطعة المستقيمة $\vec{pq}$ اذا كان

$$p = (-3, 2, -1), q = (4, 2, -1)$$

٣- اوجد إحداثيات النقطة c التي تقع عند خصل الطريق من النقطة $a = (-1, -1, 2)$

$$b = (9, 4, 7)$$

٤- اذا كانت $a = (3, -4, 6)$; $b = (-2, 3, -2)$ فاوجد إحداثيات النقطة c على الخط

المستقيم ab بحيث

$$(i) [a, c] = \frac{1}{2} [c, b] \quad (ii) [a, c] = \frac{3}{5} [c, b]$$

$$(iii) [a, c] = \frac{5}{3} [c, b]; \quad (iv) [a, c] = \frac{3}{5} [a, b]$$

٥- اوجد العدد λ بحيث

$$(i) \text{ يكونا المتجهان } \vec{a} = (2, 3, 1) \text{ و } \vec{b} = (3, -2, 5) \text{ متعامدين.}$$

$$(ii) \text{ اذا كان } \vec{a} = (2, 1, 1) \text{ و } \vec{b} = (1, -5, 0) \text{ فاجان المتجهين } \vec{a} + 2\vec{b} \text{ و } \vec{b} - 2\vec{a} \text{ متعامدان.}$$

$$(iii) \text{ اذا كان } \vec{a} = (2, -1, 1) \text{ و } \vec{b} = (6, -3, 0) \text{ متجهين متوازيين}$$

$$٦- \text{ اذا كان } \vec{a} = (2, 1, 1); \vec{b} = (2, -1, 1); \vec{c} = (3, 1, 5) \text{ و } \vec{d} = (x, y, z)$$

$$\text{بحيث } \vec{a} \cdot \vec{d} = 5, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2, \vec{c} \cdot \vec{d} = 6 \text{ فاوجد } \vec{d}.$$

$$٧- \text{ اثبت ان المتجهات } \vec{a} = (2, 0, 0); \vec{b} = (0, 5, 0); \vec{c} = (0, 0, 3) \text{ متقله فليها}$$

$$٨- \text{ اثبت ان المتجهين } \vec{a} = (2, 6, 0); \vec{b} = (1, 3, 0) \text{ مرتبطان خطيا}$$

$$٩- \text{ اذا كان } \vec{a} = (2, 1, 0); \vec{b} = (-1, 1, 1); \vec{c} = (1, 0, -1); \vec{d} = (0, -1, 1) \text{ فاجب انرا}$$

مرتبطه خطيا. اوجد ثلث متجهات متقله خطيا منها.

١٠- اوجد الزاوية المحصورة بين كل زوج من المتجهات التالية

$$(i) \vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (1, 1, 2) \quad (ii) \vec{a} = (1, 5, -1), \vec{b} = (3, -2, -7)$$

$$١١- \text{ اذا كان } \vec{a} = (-1, 3, 5); \vec{b} = (0, 2, 1) \text{ فقم من ان } \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

حدد نوع العلاقة بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ من ناحية الاستقلال والارتباط الخطي

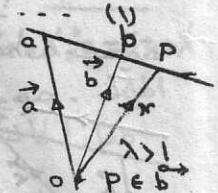
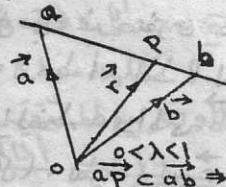
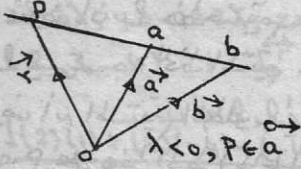
الباب الثالث المتقيم والمستوى

(٣٠١): الخط المتقيم:

١- معادلة الخط المتقيم المار بنقطتين:

ولنفرض أن a, b هما النقطتان وأن $\vec{a}, \vec{b}$ متجهيها موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل على الترتيب. وأن P نقطة تقع على هذا الخط ذي متجه موقع $\vec{r}$ متساوية لنقطة الأصل، فإن القطعتين المتقيمتين الموجهتين $\vec{a}, \vec{b}$ يكونان مرتبطان خطيا وبالتالي فإنه يوجد عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\vec{a}P = \lambda \vec{a}$ أي أن

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$



بالعكس إذا كانت $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$ فإن النقطة P تقع على الخط المتقيم $\vec{a}b$ وذلك لأن $\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{a}P = \lambda \vec{a}b$. من هنا نرى أن نظرية (٣٠١)، النقطة P تقع على الخط المتقيم $\vec{a}b$ إذا وفقط إذا وجدت أعداد وحيدة

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $\vec{r} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. حيث $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ متجهيها

المجهزات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ على الترتيب لدى نقطة O .

نتيجة: النقاط a, b, c تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجدت أعداد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ليست كلها أصغاريه $\vec{a} + \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} = \vec{0}$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. حيث $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهيها

المجهزات الممثلة بالقطع المستقيمة الموجهة $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ على الترتيب لدى نقطة O .

المعادلة (١) تعطى لكل قيمة من قيم البارامتر λ نقطة من نقط الخط $\vec{a}b$

وبالتالي فإن المعادلة (١) تعبر عن نقط الخط المتقيم $\vec{a}b$ ولذا فهي تسمى بالمعادلة

الموجهة للخط المتقيم المار بالنقطتين a, b .

في الفراغ إذا كانت $P = (x, y, z)$ و $b = (x_2, y_2, z_2)$ و $a = (x_1, y_1, z_1)$ بالنسبة لنظام إحداثي فيه "نقطة أصل" فإن:

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1); y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1); z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \dots (2)$$

تسمى المعادلات (٢) بالصورة البارامترية للمتقيم $\vec{a}b$ ، حيث λ البارامتر.

بم حذف البارامتر λ من المعادلات (٢) نحصل على معادلة واحدة على الصورة

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (3)$$

تصرف (3) بالصيغة المتماثلة لمعادلة الخط المستقيم
مثال (11): أوجد صور المختلفة للخط المستقيم المار بالنقطة $a=(3, -1, 4)$ و $b=(-2, 2, 1)$

الحل: المعادلة الموجهة للخط المستقيم هي: $\vec{r} = (3, -1, 4) + \lambda(-5, 3, -3)$

المعادلات البارامترية للخط المستقيم هي: $x=3-5\lambda; y=-1+3\lambda; z=4-3\lambda$

الصيغة المتماثلة للخط المستقيم هي: $\frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-3}$

ب- معادلة الخط المستقيم المار بنقطة وفي اتجاه متجهه له:

تعريف: نفرض أن L خط مستقيم، كل متجه غير صفري يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة

على الخط L يسمى متجه للخط المستقيم L . لاحظ أنه الخط L له أكثر من متجه $\vec{a}$.
ولنفرض أن المستقيم المطلوب يمر بالنقطة a والمتجه $\vec{a}$ و المتجه $\vec{b}$ و المتجه $\vec{c}$

نختار نقطة P على هذا الخط (كما بالمثل). نفرض أن $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ المتجهان المحاذيان المقطعين المستقيمتين $\vec{OP}, \vec{a}$ على الترتيب

لنأخذ نقطة O . إذن $\vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{b}; \lambda \in \mathbb{R}$ وبالتالي فإنه المعادلة

الموجهة لهذا المستقيم هي: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (4)

في الفراغ إذا كانت $a=(x_1, y_1, z_1); b=(b_1, b_2, b_3); p=(x, y, z)$

فإن الصورة البارامترية لهذا الخط المستقيم هي

$$x=x_1+\lambda b_1; y=y_1+\lambda b_2; z=z_1+\lambda b_3 \quad (5)$$

وأنه الصيغة المتماثلة لهذا الخط هي $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3} \quad (6)$

مثال (12): أوجد الصور المختلفة للخط المستقيم المار بالنقطة $a=(-2, 2, 1)$ والمتجه $\vec{b}=(4, -3, 1)$

الحل: المعادلة الموجهة لهذا المستقيم هي: $\vec{r} = (-2, 2, 1) + \lambda(4, -3, 1)$

المعادلات البارامترية لهذا المستقيم هي: $x=-2+4\lambda; y=2-3\lambda; z=1+\lambda$

الصيغة المتماثلة لهذا المستقيم هي: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$

ملحوظة: إذا كانت $\vec{a}$ متجه للمستقيم L فإنه مركباته مكونة $\vec{a}$ للقطعة المستقيمة

الموجهة على الخط L الممتدة للمتجه $\vec{a}$. لذلك نرى مركبات $\vec{a}$ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ الخط L

تعريف: تعرف الزاوية بين الخط المستقيم L, L' على أنها الزاوية الحادة بين

أي متجهين لهما أي أنه إذا كانت:

$$L: \vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad ; \quad L': \vec{r} = \vec{a}' + \lambda' \vec{b}'$$

فإن الزاوية θ بين ℓ, ℓ' تعطى من العلاقة
 ففي الفراغ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ إذا كانت $\vec{b}' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ فإن

$$\cos \theta = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{b}'|}{\|\vec{b}\| \|\vec{b}'\|} = \frac{|b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \sqrt{b'^2_1 + b'^2_2 + b'^2_3}} \quad \dots (7)$$

شروط توازي ℓ, ℓ' هو أي $\vec{b} \parallel \vec{b}'$ $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$: $\vec{b} = \lambda \vec{b}'$ أي $\frac{b_1}{b'_1} = \frac{b_2}{b'_2} = \frac{b_3}{b'_3}$
 شرط التقاعد للمتجهين ℓ, ℓ' هو

$$\vec{b} \cdot \vec{b}' = 0 \Rightarrow b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3 = 0$$

مثال (3): أوجد الزاوية بين الخطين المتجهين

$$\ell: x = -3 + 2\lambda; y = -2 + 3\lambda; z = 6 - 4\lambda; \ell': x = 5 + \lambda; y = -1 - 4\lambda; z = -4 + \lambda$$

$$\vec{b} = (2, 3, -4) \quad \vec{b}' = (1, -4, 1)$$

فإذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين ℓ, ℓ' فإن

$$\cos \theta = \frac{|(2)(1) + (3)(-4) + (-4)(1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{29} \sqrt{18}} \approx 0.6$$

مثال (4): أوجد نقطة تقاطع الخطين المتجهين

$$\ell: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{-4} \dots (1) \quad \ell': \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+4}{-4} \dots (2)$$

الحل: الطريقة الأولى:

من البنية الأولى والثانية في (1), (2) وكذلك البنية الأولى والثالثة في (2) نحصل أن

$$3x - 2y + 5 = 0; 4x + y - 19 = 0; x - y = z \quad \text{هذه المعادلات}$$

$$x = 3; y = 7; z = -6 \Rightarrow (3, 7, -6)$$

نقطة التقاطع هي

$$\ell: \vec{r} = (-3, -2, 6) + \lambda(2, 3, -4); \ell': \vec{r} = (5, -1, -4) + \lambda'(1, -4, 1)$$

$$\lambda = 3, \lambda' = -2 \text{ أي } -3 + 2\lambda = 5 + \lambda'; -2 + 3\lambda = -1 - 4\lambda'$$

وبالتعويض نحصل على نقطة التقاطع وهي $(3, 7, -6)$

$$\vec{r} = (-3, -2, 6) + 3(2, 3, -4) = (3, 7, -6)$$

أو أوجد الصور المختلفة لمعادلة كل من المتجهات الآتية:

$$(i) \text{ المتجهين المارين بالنقطة } a = (1, 6, -3) \text{ و } b = (4, 9, 2)$$

$$(ii) \text{ المتجهين المارين بالنقطة } a = (-4, -8, 3) \text{ و } b = (1, 2, 4)$$

$$(iii) \text{ المتجهين المارين بالنقطة } a = (2, -3, 1) \text{ و } b = (4, 5, -2)$$

$$(2, 2, -3) \text{ و } (4, 5, -2)$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

(١٧) المتيقن المار بالنقطة (٢, ٣, -١) موازيا للخط المتيقن

جـ - أوجد الزاوية بين المتيقين

$$l: x = -2 + 3\lambda, y = 0, z = 3 - \lambda; l': x = -1 + 2\lambda', y = 0, z = 3 + \lambda'$$

د - أوجد نقطة تقاطع المتيقين

$$l: x = -3 + 2\lambda, y = -2 + 3\lambda, z = 6 - 4\lambda; l': x = 5 + \lambda', y = -1 - 4\lambda', z = -4 + \lambda'$$

هـ - هل تقع النقطة (٢, ٣, -١) على الخط المتيقن المار بالنقطة (١, ١, -٢) و (٠, -١, -١)

و - أوجد قيمة λ التي تجعل المتيقين $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ متقاطعين على التقاطع.

٦ - أوجد زوايا المثلث abc إذا كان $a = (2, 3, 5), b = (-1, 3, 2), c = (3, 5, -2)$

٧ - أثبت أن $\frac{\pi}{2}$ هي الزاوية بين المتيقين التي a, b, c (١, ١, ٢) و (١, ١, ٢) و (١, ١, ٢)

٨ - أوجد الزاوية بين المتيقين $\frac{x-6}{6} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{9}$ و $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-5}{3}$

٩ - أثبت أن المتيقيات التي $a = (\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}), b = (\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}), c = (\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7})$ متعامدة متبادلة.

١٠ - أثبت أن الخط (٣, ٢, ٤), (٤, ٥, ٢), (٥, ٨, ٥), (٦, -١, ٢) تقع على استقامة واحدة باستخدام ج. ق. ٩.

(٣٠٠) : المسوى :

نعلم أن الشرط الضروري والخاص لكي تكون ثلاث متجهات

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

وهذا يعني هندسياً أن المتجهات الثلاثة غير الصفري "جميعهم متوازيين". ولكن من

مبادئ حساب المتجهات يمكن التعبير عن ذلك بأنه ضربهم الخلقي : $\vec{a} \otimes \vec{b} \otimes \vec{c} \neq 0$

حيث رمز العلاقة $\otimes$ لفاصل الضرب الاتجاهي. للمتيقين $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. وطبقاً لقاعدة ليد

اليمين نجد أن $\vec{a} \otimes \vec{b} \otimes \vec{c} = \vec{b} \otimes \vec{c} \otimes \vec{a} = \vec{c} \otimes \vec{a} \otimes \vec{b}$ ولذا سوف نضرب هذا الضرب الخلقي

بالرمز $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ويكون شرط عدم الاستواء هو $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ كما

يجب ملاحظة أن المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متساوية بالقطع المتيقن $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متوازية

لنظام إحداثي ثلاثي البعد فيه ٥ كنقطة أصل وذلك على الترتيب.

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

- ٩١ -

٢- معادلة المستوى المار بنقطة معلومة وعمودي عليه متجه :

ولنفرض أن النقطة المعلومة هي a وأنه المتجه $\vec{a}$ في اتجاه

العمودي له . نأخذ نقطة P واقعة على هذا المستوى (شكل (١))

نفرض أنه $\vec{a}$ و $\vec{r}$ هي المتجهات المصلة بالقطع المستقيمين $\vec{OP}$ و $\vec{OA}$

على الترتيب لدى نقطة O . من الشكل يتضح أن $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$

وبما أن $\vec{a}$ عمودي على المستوى . إذن $\vec{a}$ عمودي على $\vec{AP}$

وبالتالي يكون $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$ أي أن

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$$

(١) - - -

هذه معادلة المستوى المطلوب

فإذا كانت $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{r} = (x, y, z)$ فإنه المعادلة (١)

تصبح : (٢) - - - $b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1) + b_3(z - z_1) = 0$ وهي ما تعرف بالصورة

الخاصة للمستوى . بوضع $d = -b_1x_1 - b_2y_1 - b_3z_1$ و $b_1 = A$, $b_2 = B$, $b_3 = C$

$$Ax + By + Cz + d = 0 \quad (3) \quad - - -$$

وبصفة عامة فإنه المعادلة (٣) تمثل دائما مستوى المتجه (A, B, C) في اتجاه العمودي له .

مثال (١) : أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2, 0, -1)$ و العمودي على المتجه

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

الحل : معادلة المستوى هي :

$$b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1) + b_3(z - z_1) = 0 \Rightarrow$$

$$1(x - 1) + 2(y - 0) + 3(z + 2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z + 5 = 0$$

مثال (٢) : أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2, 1, -1)$ و الموازي للمتجهين

$$\vec{c} = (5, 0, -1) ; \vec{d} = (-3, 2, 1)$$

الحل : نوجد المتجه $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ لأنه يكون عموديا على كل من $\vec{c}$ و $\vec{d}$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k} = (2, -2, 10)$$

إذن معادلة المستوى المار بالنقطة a والعمودي على المتجه $\vec{b}$ هي :

$$2(x - 1) - 2(y + 2) + 10(z - 1) = 0 \Rightarrow x - y + 5z - 8 = 0$$

مثال (٣) : أوجد معادلة المستوى الموازي للمستوى $3x - 4y + z + 2 = 0$ و المار

بالنقطة $(2, 1, -1)$

الحل : متجه اتجاه العمودي للمستوى المعطى هو $(3, -4, 1)$ وهو نفسه متجه اتجاه العمودي

للمستوى المطلوب . إذن معادلة المستوى المطلوب هي $3x - 4y + z + 5 = 0$

Since $N \perp \text{Plane} \Rightarrow$
Normal to every line in the
Plane $\Rightarrow$

Look @ sketch

-55-

من المعلوم أنه $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b}$ هو متجه العمود المرسوم من O للمستوى. المتجه $\vec{a} \otimes \vec{b}$ يكون موجبا أو سالبا حسب كانت الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حادة أم منفرجة. بدلالة الإحداثيات إذا كان d هو طول العمود المرسوم من نقطة الأصل للمستوى فإنه المعادلة (1) تأخذ الصورة (4) $\vec{r} \otimes \vec{b} = |d| \Rightarrow \vec{r} \otimes \vec{b} = |d| \dots (4)$

وتعرف (4) بالصورة العمودية لمعادلة المستوى حيث $\vec{b}$ هو متجه وحدة في اتجاه متجه $\vec{a}$ إذا كان A هو البعد في السين لنقطة تقاطع محاور السينات مع المستوى. فإنه النقطة تقع على المستوى:

$$\therefore A \vec{e}_1 \otimes \vec{b} = d \Rightarrow A = \frac{d}{\vec{b} \otimes \vec{e}_1} = \frac{d}{p} \quad (A \vec{e}_1 \otimes x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3) = A p = d$$

وبالمثل إذا كان B و C هما البعدان في الصادي والعيبي لنقطة التقاطع المحورية (صادي والعيبي على الترتيب مع المستوى فإنه $B = \frac{d}{m}$ و $C = \frac{d}{n}$ حيث $\vec{b} = (l, m, n)$

$$\text{من هذا نرى أنه} \Rightarrow \frac{d}{A} x + \frac{d}{B} y + \frac{d}{C} z = d \Rightarrow \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \quad (5)$$

وتعرف المعادلة (5) بمعادلة المستوى بدلالة تقاطعه السين والصادي والعيبي.

تعريف: نسمي نقط تقاطع مستوى مع محاور الإحداثيات بمقاطع المستوى في محاور الإحداثيات. وتسمى الخطوط المتقيمة الواصلة بين المقاطع من محاور الإحداثيات (أي خطوط تقاطع المستوى مع مستويات الإسناد) أشبار المستوى في مستويات الإسناد ملحوظة: ولنفرض أنه المعادلة العامة للمستوى هي:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{و لنضع على الصورة} \quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \quad \text{وبوضع} \quad A = -\frac{d}{a}, B = -\frac{d}{b}, C = -\frac{d}{c}$$

نحصل على $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$ وهذه هي معادلة المستوى الذي مقطوعاته السين والصادي والعيبي هي $-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}$ على الترتيب. نلاحظ أن هذا يكون صحيحا مع افتراض أن $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ لأنه في حالة $a = 0$ مثلا فإنه المستوى لا يقابل محور السينات ويكون المستوى موازيا لمحور السينات، باطل في حالة $c = 0$ و $b = 0$ فإنه المستوى يكون موازيا لمحور الصادي أو العيبي على الترتيب. أما إذا كانت $d = 0$ فإنه المستوى يمر بنقطة الأصل ولا يقطع محاور الإحداثيات إلى في نقطة الأصل.

مثال (1): عين تقاطع من محاور الإحداثيات بالمستوى $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ وعين كذلك أشباره في مستويات الإسناد.

الحل : المقاطع من محاور الإحداثيات هي $(0, 0, 3)$ ، $(0, 4, 0)$ ، $(6, 0, 0)$
أما المستوى في مستويات الإسناد هي

$$\vec{r} = (6, 0, 0) + \lambda(6, -4, 0) \text{ و } \vec{r} = (0, 4, 0) + \lambda(0, 4, -3) \text{ و } \vec{r} = (0, 0, 3) + \lambda(-6, 0, 3).$$

مثال (٥) : أوجد المقاطع من محاور الإحداثيات بالمستوى الموازي للمستوى

$$3x - 2y + z = 1 \text{ والذي يحتوي النقطة } (1, -2, 1).$$

الحل : حيث أن المستوى المطلوب يوازي المستوى المعطى فإنه معادلته تكون

$$3x - 2y + z = k$$

وحيث أن النقط المعطاه تقع على هذا المستوى فإننا نحقق معادلته وبالتالي فإنه $k=2$

فتكون معادلة المستوى المطلوب هي $3x - 2y + z = 2$ ومقاطع مع محاور الإحداثيات هي $(2, 0, 0)$ ، $(0, -1, 0)$ ، $(0, 0, 2)$.

ب - معادلة المستوى المار بثلاث نقاط :

نظرية : نفرض أن $p \in \pi$. النقطة P تقع في المستوى المار بثلاث نقاط a, b, c ليست على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان $[\vec{r} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}] = 0$ حيث $\vec{c} = \vec{oc}$ ، $\vec{b} = \vec{ob}$ و $\vec{a} = \vec{oa}$ ، $\vec{r} = \vec{op}$ لذي نقطه o .

البرهان : إذا وقعت النقطة P في المستوى المار بالنقاط الثلاث a, b, c فإنه المتجهات $\vec{ac}$ و $\vec{ab}$ و $\vec{ap}$ تكون مرتبطة خطياً (نظرية) أي أنه

$$[\vec{ap}, \vec{ab}, \vec{ac}] = 0 \Rightarrow [\vec{r} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}] = 0$$

وبالعكس حيث نفرض أن $[\vec{r} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}] = 0$ وهذا يعني أن

المتجهات $\vec{r} - \vec{a}$ ، $\vec{b} - \vec{a}$ ، $\vec{c} - \vec{a}$ مرتبطة خطياً أي أنه المتجهات $\vec{ap}$ ، $\vec{ab}$ ، $\vec{ac}$ مرتبطة خطياً وهذا لا يمكن حدوثه إلا في حالة وقوع P في هذا المستوى

بناءً على النظرية السابقة فإننا نجد أن معادلة المستوى المطلوب هي

$$[\vec{r} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}] = 0 \quad \dots (1)$$

حيث a, b, c النقاط الثلاث المعطاه . وتعرف (١) بالصورة الموجه للمستوى لواء اعتبارنا أن o هي نقطة الأصل للنظام الإحداثي الثلاثي البعد وأن

$$a = (x_1, y_1, z_1) \text{ ، } b = (x_2, y_2, z_2) \text{ ، } c = (x_3, y_3, z_3)$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (2)$$

فإنه المعادلة (١) يمكن كتابتها على الصورة

حيث $P = (x, y, z)$. وتعرف (٢) باسم المعادلة الإحداثية

كما أنه المعادلة (١) يمكن كتابتها على الصورة

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \vec{r} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad \dots (3)$$

بالإشارة إلى النظام الإحداثي الثلاثي العرفية ه ك نقطة أصل تعطي (3) على الصورة

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ z &= \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

نسمى المعادلات (4) بالصورة البارامترية للمستوى وبطبارامتراته فقط وذن

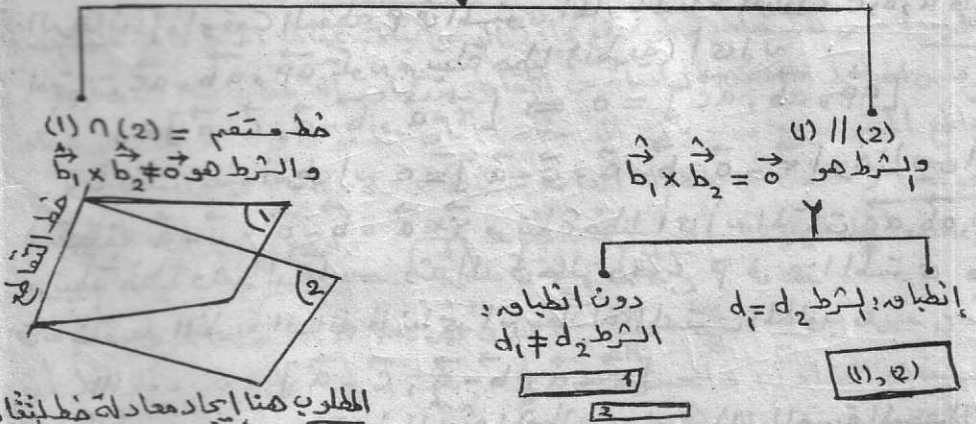
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

(٣.٣) : العلاقة بين متوئين :

اعتبر المتوئين في صورتها العمودية

$$\vec{r} \odot \vec{b}_1 = d_1 \quad \dots (1) \quad ; \quad \vec{r} \odot \vec{b}_2 = d_2 \quad \dots (2)$$

ويمكن تخمين العلاقة بين المتوئين (1) (2) تبعاً للبيان الآتي



المطلوب هنا إيجاد معادلة خط التقاطع

$$\vec{r} \odot (1, 1, -1) = 18 \quad \dots (1)$$

$$\vec{r} \odot (-2, 7, -4) = 96 \quad \dots (2)$$

الحل : نجد أنه ٢٠٨ العمودي على المستوى (١) هي (١-١-١) وانه ٢٠٨ العمودي

على المستوى (2) هي (-2, 7, -4) .. نجرى الاختيار الآتي لطريقة وضع

$$\left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & -4 \end{matrix} \right| = (3, 6, 9) \neq \vec{0} \Rightarrow (1) \cap (2) = \text{خط مستقيم}$$

For we search for a line in any point in space can be found on it, thus, putting $z=0$ doesn't contradict anything.

Look,

- 50 -

المطلوب إيجاد معادلة خط التقاطع وذلك بحل المعادلتين:

$$(1) \quad x + y - z = 18 \quad (1) \quad -2x + 7y - 4z = 96 \quad (2) \Rightarrow$$

gives (3)
(1) x 2 gives (4)

$$(3) \quad x = \frac{z}{3} + \frac{10}{3}, \quad y = \frac{2z}{3} + \frac{44}{3} \quad (4) \quad \xrightarrow{z=0} \quad x = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{44}{3}$$

taking $r_1 = (\frac{10}{3}, \frac{44}{3}, 0)$
 $r_2 = (3, 14, 0)$

where these points lies on the line

Parallel to the orientation of the line $\Rightarrow$

وبالتالي نحصل على النقطه $(\frac{10}{3}, \frac{44}{3}, 0)$ وهي تقع على الخط المستقيم المطلوب

إذن معادلة المستقيم المطلوب هي: $r = (\frac{10}{3}, \frac{44}{3}, 0) + \lambda(1, 2, 3)$

(٣٠٤) العلاقة بين مستقيمين ومتوازي:

ولنفرض أن معادلة المستوى هي: $r \cdot \vec{a} = d$ (1)

وأن معادلة المستقيم هي: $r = \vec{a} + \lambda \vec{c}$ (2)

يمكن توضيح العلاقة بين (1)، (2) حسب البيان التالي

نقطه $(1) \cap (2) =$
الشرط هو $\vec{c} \cdot \vec{a} \neq d$
المطلوب إيجاد نقطه التقاطع
وذلك بحل (2) مع (1)

(1) || (2)
الشرط هو $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

(2) يقع في (1) الشرط هو $\vec{a} \cdot \vec{b} = d$
(2) لا يقع في (1) الشرط هو $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq d$

مثال (٧): اختبر العلاقة بين المستقيمين (1) ... $r = (1, 2, -3) + \lambda(2, -3, 4)$
والمستوى $r \cdot (2, 4, -1) = -1$ (2)

الحل: نجرب أولاً الاختبار الثاني

$$(2, -3, 4) \cdot (2, 4, -1) = 4 - 12 - 4 = -12 \neq 0 \Rightarrow$$

المستقيم (1) يقطع المستوى (2) في نقطة. المطلوب إيجاد إحداثيات نقطة التقاطع.
بحل المعادلة (1) مع المعادلة (2) أي أن

$$[(1, 2, -3) + \lambda(2, -3, 4)] \cdot (2, 4, -1) = -1 \Rightarrow 13 - 12\lambda = -1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

إذن نقطه التقاطع هي $(\frac{10}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{3}) = (1, 2, -3) + \frac{7}{6}(2, -3, 4)$

(٣٠٥) العلاقة بين ثلاث مستويات:

ففي هذه الحالة إما أن تنطبق المستويات الثلاثة أو تتوازي أو
على الأقل اثنين من المستويات الثلاثة يتقاطعون وهناك يكون تقاطعها في
خط مستقيم (حسب (٣٠٣)). وسوف نرى الحالة الأخيرة وتؤهلنا لاستنتاج
النتيجة لوراء العلاقة بين خط التقاطع والمستوى الثالث (حسب (٣٠٤))

$$\vec{r} \otimes \vec{b}_1 = d_1 \dots (1); \vec{r} \otimes \vec{b}_2 = d_2 \dots (2); \vec{r} \otimes \vec{b}_3 = d_3 \dots (3)$$

تجرى عليه الاختيار طين من المستويات حتى نجد اثنين منها متقاطعين وليكن مثل المستويين (3) و (4) فتوجد معادلة خط التقاطع (ج) (3.3) وليكن معادلته هي

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad \dots (4)$$

ندرس العلاقة بين المنوى (2) والمحقق (4) حسب (٣٠٤) قيناً لدينا الحالات التالية :

(i) المقيّم يقع في المستوى (2) وهذا نقول أنه المستويات الثلاثة تتقاطع في خط

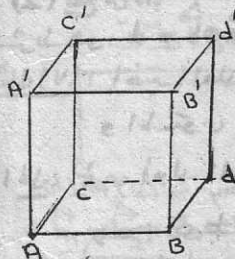
مستقيم معارلة هي (4)

(ii) المقيّم (1) يوازي المئوي (2) وهذا تكون الخطوات الثلاثة متتالية.

(iii) المتقيّم (١) يقابل الجوى (٢) في نقطة وفي هذه الحالة تكون المستويات الثلاثة

هـ ما ثلثيا رأسه تقطع التدفد والى نعل على إحداهما ثيابا -

(٢-٦): العلاقة بين مقمري:



(١) أَنْ يَكُونِ الْمُتَقِيمَانِ مُتَقَالِعَيْنِ وَفِي هَذِهِ الْحَالَةِ فَإِنَّهَا بَعْدَ فِ

مستو واحد توجد معادلته ، أو

(ii) أن يكونه المتقين متوازي وفي هذه الحالة فإنها تعان

في متو واحد نحو حارلته ، أو

(iii) أن يكونه المستقيمان غير متقاطعين وغير متوازيين. في هذه الحالة نقال أ^Aزها شاملة

فمثلًا في المثلث الموضَّع بالمثل نجد أنه المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يتقاطع مع أربعة أضلاع أخرى

(AA', AC, BB', BD) و يوازي ثلاثة أحرف (cd, A'B', c'd') ويكون سحاليا (أو متخالفاً) مع

الدَّربِعةُ أَصْرُ الدُّعْرِى الباقية .

لديجاد شرط تعاضل المتجهان $\vec{r} = \vec{a} + \lambda_1 \vec{b} \dots (1) ; \vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{b}_1 \dots (2)$

الماراة بالنقطتين a, a والمجهتين $\vec{b}, \vec{b}$ متجهي اتجاه (م) فيكون $\vec{a}, \vec{a}$ هو $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{b}] = 0$

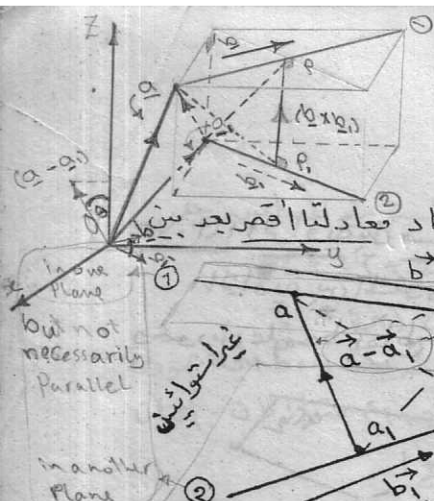
وبدولة الحداثات يؤول هذا السُّرْم إلى :

ويجب ملاحظة أنه بالإضافة الى هذا الشرط

لديهم التأكد من أن $b_1 \times b \neq 0$ (أي $a \neq$

المستقيمة غير متوازمان

$$(\underline{a}, -\underline{a}), (\underline{b} \times \underline{b}_1)$$



PP_1 equals the projection of $(a - a_1)$ on the plane of L_1 starting from the point a_1 which L_1 passes. i.e. plane of L_1 passes L_1 and $L_1 \perp$
 -cv- Plane of L_1

P, a and P, a₁ doesn't intersect

this point is understood by utilizing some tricks (how, can't be clear)

وسوف ندرس الحالة (iii) بالتفصيل حيث يتطلب منا إيجاد معادلتنا أقصر بعد بين المستقيمتين المتخالفتين وكذلك طول أقصر بعد على النحو التالي:
 1- نوجد طول أقصر "PP₁" بين (1), (2), $b \times b_1$, وذلك كالآتي:

من الشكل نرى أنه $PP_1 = \| \vec{a} - \vec{a}_1 \| \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a} - \vec{a}_1$ و $b \times b_1$
 ولكن أيضا $\cos \theta = \frac{[\vec{a} - \vec{a}_1, b, b_1]}{\| \vec{a} - \vec{a}_1 \| \| b \times b_1 \|}$
 $\Rightarrow \| \vec{a} - \vec{a}_1 \| \cos \theta = \frac{[\vec{a} - \vec{a}_1, b, b_1]}{\| b \times b_1 \|}$
 $\Rightarrow PP_1 = \frac{[\vec{a} - \vec{a}_1, b, b_1]}{\| b \times b_1 \|}$ طول أقصر بعد
 علما بأنه شرط إتخالف

نحو $[\vec{a} - \vec{a}_1, b, b_1] \neq 0$ ، خلاف ذلك يتوى المستقيمان
 c- نرى من الشكل أنه معادلتنا أقصر بعدهما
 $[\vec{r} - \vec{a}, b, b \times b_1] = 0$ & $[\vec{r} - \vec{a}_1, b_1, b \times b_1] = 0$

مثال (v): اختبر العلاقة بين المستقيمتين
 $\vec{r} = (1, 2, 3) + \lambda (-1, 2, 4) \dots (1)$
 $\vec{r} = (-2, 1, 5) + \lambda_1 (3, 4, 6) \dots (2)$

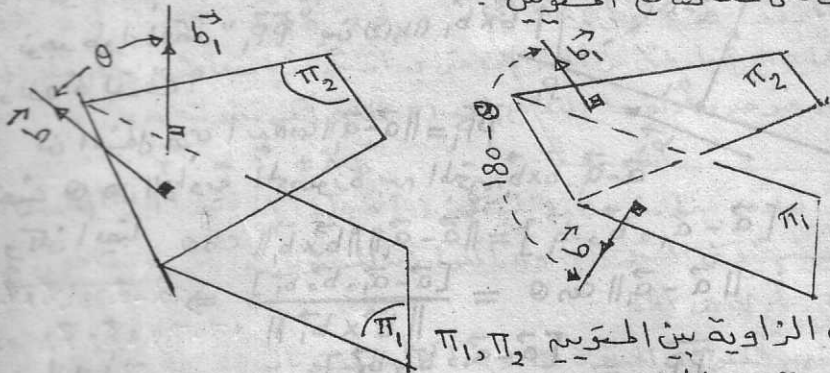
الحل: البَحْثِيار
 $[\vec{a} - \vec{a}_1, b, b_1] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$
 النتيجة: المستقيمان متخالفان

المطلوب إيجاد
 (i) طول أقصر بعد $b \times b_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (-4, 18, -10)$
 $\| b \times b_1 \| = \sqrt{16 + 18^2 + 100} = \sqrt{440} = 2\sqrt{110} \approx 20.8$
 $\frac{26}{20.8} = 1.25$ طول أقصر بعد يابوي
 (ii) معادلتنا أقصر بعد

$[\vec{r} - (1, 2, 3), (-1, 2, 4), (-4, 18, -10)] = 0 = [\vec{r} - (-2, 1, 5), (3, 4, 6), (-4, 18, -10)]$

(٣.٧) : الزاوية بين مستويين :

الزاوية بين المستوي π_1, π_2 هي الزاوية بين خطين متجهين في المستويين وعموديين على خط تقاطع المستويين .



أي أن الزاوية بين المستويين π_1, π_2 هي الزاوية بين المتجهين العموديين عليها أو مملتها على حسب ما إذا كانت الزاوية بين العمودين حادة أم منفرجة .

نفرض أن $\pi_1: (\vec{r} - \vec{a}_1) \odot \vec{b}_1 = 0$; $\pi_2: (\vec{r} - \vec{a}_2) \odot \vec{b}_2 = 0$ إذا كانت θ الزاوية بين المستويين π_1, π_2 فإنه
(تعرف بالزاوية الزاوية بين π_1, π_2) $\cos \theta = |\vec{b}_1 \odot \vec{b}_2| / \|\vec{b}_1\| \|\vec{b}_2\|$
مثال (٨) : أوجد جيب تمام الزاوية بين المستويين

$$2x + 2y - z = 3 \quad \text{و} \quad x - 2y - 2z = 1$$

$$\cos \theta = \frac{(2)(1) + (2)(-2) + (-1)(-2)}{\sqrt{4+4+1} \sqrt{1+4+4}} = \frac{2-4+2}{3 \times 3} = 0 \Rightarrow \text{الحل:}$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \text{المستويان يتقاطعا على التقاطع}$$

ملحوظة هامة : نفرض أن $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ مستويين . المعادلة $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ تمثل لكل قيمة من قيم λ معادلة مستوى مار بخط تقاطع المستويين شريطة أن λ مستوى يوازي المستويين إذا كانا متوازيين . إذا أعطينا شرطا إضافيا فإنه يمكننا تعيين قيمة λ وبالتالي تعيين المستوى الذي يحقق هذا الشرط من بين عائلة المستويات $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$.

مثال (٩) : أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين .

$$2x - 2y + z = 3 \quad \text{و} \quad x + 2y + 2z = 5$$

$$\vec{b} = (2, 2, 3) \text{ هو}$$

الحل: نوجد معادلة عائلة المستويات المارة بمختلط المقاطع المستويين المعطيين وهي

$$x + 2y + 2z - 5 + \lambda (2x - 2y + z - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + 2\lambda)x + (2 - 2\lambda)y + (2 + \lambda)z = 5 + 3\lambda \quad \dots (1)$$

والمطلوب إيجاد معادلة مستوى من هذه العائلة شريطة أن يكون متجه عمودي عليه أي أنه المتجه $\vec{c} = (1 + 2\lambda, 2 - 2\lambda, 2 + \lambda)$ متوازيًا مع $\vec{a}$ أي أن

$$\frac{1 + 2\lambda}{2} = \frac{2 - 2\lambda}{2} = \frac{2 + \lambda}{3} \Rightarrow$$

$$2(1 - \lambda) = 1 + 2\lambda \Rightarrow 2 - 2\lambda = 1 + 2\lambda \Rightarrow 1 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

معادلة المستوى المطلوب هي: $(1 + 2(\frac{1}{4}))x + (2 - 2(\frac{1}{4}))y + (2 + \frac{1}{4})z = 5 + 3(\frac{1}{4}) \Rightarrow$
 $6x + 6y + 9z = 23$

تمارين عامة:

(١) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٢، ٣، ١) والعمودي على المتجه (٤، ٥، ١)

(٢) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٤، ٢، ٣) والمتوازي للمتجهين

$$\vec{a} = (2, 0, 2), \vec{b} = (3, 1, 1)$$

(٣) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٥، ١، ٣) و(١، ٣، ٢) و(٤، ٥، ٦)

(٤) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٥، ١، ٣) و(٢، ٤، ٥) والمتوازي للمتجه

$$\vec{a} = (6, 3, -5)$$

(٥) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (١، ١، ١) والمتوازي للمستوى

$$7x + 2y - z - 1 = 0$$

(٦) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (٣، ٥، ٢) ويتعامد مع كل

$$6x - 6y + 2z - 1 = 0, 5x + y - z + 5 = 0$$

(٧) أكتب المستويات التالية في الصورة العمودية

$$(i) 6x - 3y + 2z + 14 = 0 \quad (ii) x - 2y + 2z - 6 = 0$$

(٨) عين الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية

$$(i) x + y + 2z = 3; 2x + y + z = 6$$

$$(ii) 2x + 6y + 6z = 7; 3x + 4y - 5z = 9$$

$$(iii) 2x + 6y - z = 1; 2y - 4z = 8$$

$$(iv) \vec{r} \cdot (2, 2, -1) = 3; \vec{r} \cdot (3, 2, 6) = 14$$

(٩) اِثْبَتْ أَنَّهُ الْمُسَوَّيَاتُ الذَّرِيعَةُ

$$\vec{r} \odot (2, -3, 2) = 0; \vec{r} \odot (1, 1, -3) = 4; \vec{r} \odot (3, -1, 1) = 2; \vec{r} \odot (7, -5, 6) = 1$$

تتلاقى في نقطة واحدة .

(١٠) أوجد نقطة تقاطع الخط الحقيقي $x-2=y-3=z-4$ مع المستوى

$$2x + y + z - 6 = 0$$

$$(١١) اِثْبَتْ أَنَّهُ الْمُسَوَّيَاتُ ٤: $\vec{r} \odot (2, 5, 3) = 0; \vec{r} \odot (1, -1, 4) = 3; \vec{r} \odot (0, 7, -5) = -4$$$

تتقاطع في خط حقيقي ثم أوجد معادلتها .

(١٢) أوجد نقطة تقاطع الخط الحقيقي المار بالنقطتين (٣، ٢، ٤) و (٤، ٣، ٥) مع

$$\text{المستوى } 2x + y - z = 3$$

$$(١٣) \text{ أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالخط الحقيقي } \frac{x-7}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{6}$$

والنقطة (٨، ١، ٥) .

(١٤) أوجد الصورة المتماثلة للخط الحقيقي

$$2x - 3y - z + 3 = 0 = 5x - y + z - 8$$

(١٥) اِثْبَتْ أَنَّهُ الْحَقِيقِيَّةُ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}; \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$$

يقعانه في مستوى واحد . أوجد معادلتها . أوجد أيضا نقطة تقاطع الحقيقيتين

(١٦) اِثْبَتْ أَنَّهُ الْخَطُ الْحَقِيقِيَّ الْمَارَ بِالنَّقْطِيَّةِ (٤، ٥، ٥) و (٣، ٢، ١) يتقاطعان

مع الخط الحقيقي المار بالنقطتين (١، ٥، ٦) و (٢، ٤، ٤) . أوجد نقطة التقاطع

$$(١٧) \text{ أوجد معطى الخط الحقيقي } \ell: \frac{x+6}{3} = \frac{y-1}{4} = z \text{ على المستوى } \pi: 5x+7y+3z=6$$

الحل: لتعين معطى ℓ على المستوى π فإننا ننشر المستوى π^* المار بالخط ℓ والعودي

على المستوى π . عندئذ يتحدد المعطى المطلوب كخط تقاطع المستويين π و π^* .

معادلة π^* هي:

$$\pi \times \pi^* : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 1, -1) \quad (5, 7, 3) \times (3, 4, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 1, -1)$$

$$\pi^*: \vec{r} \odot (-5, 1, -1) = 31 \quad \text{معادلتها المعطى هي} \quad \vec{r} \odot (-5, 1, -1) - 31 = 0 = \vec{r} \odot (5, 7, 3) - 6$$

(١٨) أوجد طول ومعادلتها أفقر بعديين الحقيقيين

$$\ell: x=2+2\lambda; y=3+2\lambda; z=\lambda \quad \ell': x=5+2\lambda; y=4+2\lambda; z=1+\lambda$$

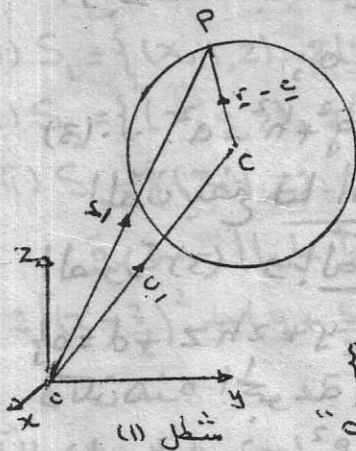
الباب الرابع الكورة The Sphere

مقدمة:

يعرف السطح الكروي (الكورة) على أنه مجموعة نقط الفراغ التي بعد كل منها عن نقطة ثابتة من نقط الفراغ يساوي مقداراً ثابتاً. أي أن السطح الكروي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة من نقط الفراغ يساوي مقداراً ثابتاً. النقطة الثابتة تسمى مركز الكورة، والمقدار الثابت يسمى نصف قطر السطح الكروي.

٤٠١: بعض صور السطح الكروي:

١- معادلة السطح الكروي بدلالة مركزه ونصف قطره:



نفرض أن C "مركز الكورة"، a "نصف قطرها". النقطة P على السطح الكروي إذا وإذا فقط كان بعدها عن C "يساوي" a . أي أن السطح الكروي الذي مركزه C ونصف قطره a هو مجموعة النقط

$$\{P \in \Delta : \|\vec{PC}\| = a\}.$$

إذا كان $\vec{r} = \vec{OP} = \vec{r}$ ، $\vec{c} = \vec{OC}$ ، حيث O "نقطة الأصل من الفراغ Δ (شكل (١))"، فإن

$$\{P \in \Delta : \|\vec{OP}\| = a\} = \{P \in \Delta : \|\vec{r} - \vec{c}\| = a\} \\ \Rightarrow \|\vec{r} - \vec{c}\|^2 = a^2 \quad \dots (1)$$

تسمى المعادلة (١) معادلة السطح الكروي المطلوب. وهذه المعادلة حقيقة لجميع النقط الواقعة على هذا السطح وليس لسواها.

إذا كانت $P = (x, y, z)$ و $C = (-f, -g, -h)$ بالنسبة
لنظام إحداثي فيه المحاور متعامدة، O نقطة أصل، فإن لمعادلة (1)
يمكن كتابتها على الصورة:

$$(x+f)^2 + (y+g)^2 + (z+h)^2 = a^2.$$

أي أن السطح الكروي "S" هو التمثيل الهندسي:

$$S = \{(x, y, z) : (x+f)^2 + (y+g)^2 + (z+h)^2 = a^2\}$$

حيث أن $\| \underline{r} - \underline{c} \|^2 = (\underline{r} - \underline{c}) \cdot (\underline{r} - \underline{c})$ ، فإن المعادلة (1) تأخذ
الصورة:

$$\underline{r}^2 - 2 \underline{r} \cdot \underline{c} + d = 0 \quad ; \quad d = \underline{c}^2 - a^2 \quad \dots (2)$$

أو بدلالة الإحداثيات الكارتيزية تكون على الصورة:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2fx + 2gy + 2hz + d = 0;$$

$$d = f^2 + g^2 + h^2 - a^2 \quad \dots (3)$$

الآن يتضح لنا أن معادلة السطح الكروي "S" تكون دائماً على

الصورة (3). وبالعكس دعنا نعتبر مجموعة نقاط الفراغ Δ :

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 + 2fx + 2gy + 2hz + d = 0\}$$

ولكن هذه المجموعة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\{(x, y, z) : (x+f)^2 + (y+g)^2 + (z+h)^2 = f^2 + g^2 + h^2 - d\}$$

من هذا نرى أنه يكون لدينا الإحداثيات التالية:

$$(i) \text{ إذا كان } f^2 + g^2 + h^2 - d < 0 \text{ فإن } S = \emptyset \text{ أي سطح كروي تخيالي}$$

$$(ii) \text{ إذا كان } f^2 + g^2 + h^2 - d = 0 \text{ فإن } S = \{-f, -g, -h\}$$

أي سطح كروي مركزه النقطة $(-f, -g, -h)$ ونصف قطره

صاويًا للصفر أي أن S تكون نقطة وهذا الحمله لمركزه

(iii) إذا كان $d > 0$ فإن S تمثل سطح كروي مركزه النقطة $(-f, -g, -h)$ ونصف قطره $a = \sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - d}$. من هذا نرى أن الممثل الهندسي للعلاقة

$$S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$$

يكون سطحاً كروياً إذا وفقط إذا كانت $F(x, y, z) = 0$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية في (x, y, z) بحيث أن:

1- معاملات z^2, y^2, x^2 متساوية

2- معاملات zx, yz, xy تساوي صفراً

مثال: بين ما إذا كانت المجموعات المعطاة تمثل هندسياً سطح كروي أو نقطة أو المجموعة الخالية.

$$(i) S_1 = \{(x, y, z) : 2(x^2 + y^2 + z^2) - 6x + 10y - 16z - 14 = 0\}$$

$$(ii) S_2 = \{(x, y, z) : 2(x^2 + y^2 + z^2) - 6x + 10y - 16z + 49 = 0\}$$

$$(iii) S_3 = \{(x, y, z) : 2(x^2 + y^2 + z^2) - 6x + 10y - 16z + 60 = 0\}$$

الحل: المعادلات المعطاة يمكن كتابتها على الصورة

$$2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + (z - 4)^2\right] = 2\left(\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + 16\right) - d \dots (1)$$

$$(i) : \text{عندما } d = -14$$

نجد أن الطرف اليمين للمعادلة (1) يساوي $63 > 0$ وبالتالي

فإن S_1 تمثل سطح كروي مركزه $C_1 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 4\right)$ ونصف

$$\text{قطره } a_1 = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

(ii) : عندما $d = 49$

نجد أن الطرف اليمين للمعادلة (1) يساوي صفراً وبالتالي فإن S_2

تمثل النقطة $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 4\right)$ أي سطح كروي مركزه النقطة ونصف قطره يساوي صفراً.

(iii) : عندما $d = 60$:

نجد أن الطرف اليمين للمعادلة (1) سالباً وبالتالي فإن $S_3 = \emptyset$.

ب - تحسين السطح الكروي المار بأربع نقط :

نلاحظ أن معادلة السطح الكروي تحتوي على أربعة مجاهيل f, g, h, d ولذلك فإنه لتحسين السطح الكروي يتطلب عادة أربعة شروط كل شرط يعطى معادلة في المجاهيل f, g, h, d . محل هذه المعادلات نحصل على قيم f, g, h, d وبالتالي على معادلة السطح الكروي ويجب ملاحظة أن مركز السطح الكروي يلحافى ثلاث شروط بينما نصف قطره يلحافى الشرط الرابع . وسوف ندرس هنا حالتين الحالة الأولى : معادلة السطح الكروي المار بأربع نقط :

نفرض أن السطح الكروي يمر بالنقط P_n ، حيث $n = 1, 2, 3, 4$ وأن $\vec{r}_n = \vec{OP}_n$ ، نقطة الأصل . المعادلة العامة للسطح الكروي هي

$$\|\vec{r} - \vec{c}\|^2 = a^2 \quad \dots (1)$$

حيث أن هذا السطح يمر بالنقط P_n ، حيث $n = 1, 2, 3, 4$ ، فإن :

$$\|\vec{r}_n - \vec{c}\|^2 = a^2 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad \dots (2)$$

وهذه أربعة معادلات في أربعة مجاهيل يمكن حلها وبالتالي الحصول على معادلة السطح الكروي المطلوب .

بدلالة الإحداثيات المارتيزية : إذا كانت

$$P = (x, y, z) , P_n = (x_n, y_n, z_n) ; n = 1, 2, 3, 4$$

نقطة على السطح الكروي فإن المعادلات (1) ، (2) تصبح على الشكل

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2fx + 2gy + 2hz + d = 0$$

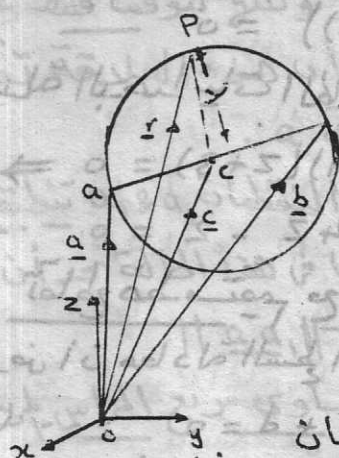
$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 + 2fx_n + 2gy_n + 2hz_n + d = 0 ; n = 1, 2, 3, 4 \quad \dots (3)$$

في هذا الباب نذكر بعضاً من أهم النتائج في الجبر الخطي

المعادلة (3) تمثل خمس معادلة في أربعة مجاهيل p, q, r, d وشرط توافقها أي وجود حل وحيد لها هو انعدام المحدر:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \dots (4)$$

وبحل المحدر $\Delta = 0$ نحصل على معادلة السطح الكروي المطلوب.
الحالة الثانية: معادلة السطح الكروي معلومة نهائياً قطريه:



نفرض أن a, b نقطتين معلومتين

تقعان على نهايتي قطر السطح الكروي لمركز c أي جدار معادلتها وأن $\underline{a} = \vec{oa}, \underline{b} = \vec{ob}$ حيث "o" نقطة الأصل (شكل (c)). إذا كانت

"c" هي مركز السطح الكروي فإن

$$\underline{c} = \vec{oc} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$$

وإذا كانت λ هي نصف قطر هذا السطح فإن

$$\lambda = \|\underline{ca}\| = \|\underline{a} - \underline{c}\|$$

$$= \left\| \underline{a} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|\underline{a} - \underline{b}\|$$

وبالتالي فإن معادلة السطح الكروي هي:

$$\|\underline{r} - \underline{c}\| = \lambda \Rightarrow \left\| \underline{r} - \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|\underline{a} - \underline{b}\|$$

أو

$$\underline{r}^2 - \underline{r} \cdot (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

وهذه المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$(5) \quad \dots (r - a) \cdot (r - b) = 0$$

وهذه هي معادلة السطح الكروي المطلوب.

إذا كانت $a = (x_1, y_1, z_1)$ و $b = (x_2, y_2, z_2)$ وكانت النقطة المتحركة P إحداثياتها (x, y, z) فإن الصورة التارتيقية للمعادلة (5) هي:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

مثال: أوجد معادلة السطح الكروي الذي فيه القطعة المستقيمة

الواصلة بين النقطتين $a = (-2, 3, -1)$ و $b = (4, 1, -3)$ قطرًا.

الحل: معادلة السطح الكروي المطلوب هي:

$$(r - (-2, 3, -1)) \cdot (r - (4, 1, -3)) = 0$$

وبدلالة الإحداثيات التارتيقية تؤدى إلى:

$$\Rightarrow (x+2)(x-4) + (y-3)(y-1) + (z+1)(z+3) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 2 = 0$$

٤.٢: تقاطع خط مستقيم مع سطح كروي:

نفرض أن معادلة السطح الكروي هي

$$r^2 - 2r \cdot c + d = 0 \quad \dots (1)$$

ومعادلة الخط المستقيم هي:

$$r = a + \lambda \hat{b} \quad \dots (2)$$

نقط تقاطع المستقيم (2) مع الكرة (1) تحقق كلا

المعادلتين، أي أن

$$(a + \lambda \hat{b})^2 - 2(a + \lambda \hat{b}) \cdot c + d = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 2(a \cdot \hat{b} - \hat{b} \cdot c)\lambda + a^2 - 2a \cdot c + d = 0 \quad \dots (3)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في λ ، نحصل على قيمتين للوسيط λ

وبالتالي على نقطتي التقاطع - جذري المعادلة (3) هما:

$$\lambda = -(\underline{a} - \underline{c}) \cdot \underline{\hat{b}} \pm \sqrt{[(\underline{a} - \underline{c}) \cdot \underline{\hat{b}}]^2 - (\underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d)}$$

وهذان الجذران يكونان حقيقيان إذا كان

$$\underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d \leq [(\underline{a} - \underline{c}) \cdot \underline{\hat{b}}]^2$$

إذا كانت a_1, a_2 هما نقطتي تقاطع الخط المستقيم (2) مع الكرة (1) فإن

$$\vec{aa}_1 = \underline{a}_1 - \underline{a} = \lambda_1 \underline{\hat{b}} \quad \& \quad \vec{aa}_2 = \underline{a}_2 - \underline{a} = \lambda_2 \underline{\hat{b}} \Rightarrow$$

$$\vec{aa}_1 \cdot \vec{aa}_2 = \lambda_1 \lambda_2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d$$

وهذه العلاقة لا تتوقف على اتجاه $\underline{\hat{b}}$ ولكننا نتوقف فقط على النقطة "a" بالنسبة للكرة الواحدة. أي أن هذه العلاقة تظل صحيحة لجميع المستقيمات المارة بالنقطة a.

إذا تساوى جذرا المعادلة (3) فإن النقطتان a_1, a_2 ينطبقان ويصبح الخط المستقيم (2) مماسا للكرة (1) في هذه الحالة نجد أن:

$$\|\underline{aa}_1\| = \underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d$$

أي أن المقدار $\underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d$ يساوي مربع المماس المرسوم من النقطة "a" للكرة (1).

بدلالة الإحداثيات الكارتيزية، إذا كانت $a_1 = (x_1, y_1, z_1)$

وكان المركز $C = (-p, -q, -h)$ فإن مربع طول المماس من النقطة

"a" للكرة (1) يساوي $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2px_1 + 2qy_1 + 2hz_1 + d$

مثال: إذا قطع الخط المستقيم المار بالنقطة (5,5,5) (4-ر-2)

الكرة $x^2 - 2x - (y^2 - 3y - 7z + 3) = 0$ في النقطتين P_1, P_2 فإيت أن

حيث $\vec{P_1b} = 2 \vec{aP_1}$ و $\vec{P_2b} = -2 \vec{aP_2}$ ، $\vec{P_1b}$ هي النقطة لذوي وأن $\vec{P_2b}$ هي النقطة الثاني.

الحل : معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين a, b هي :

$$\underline{r} = (2, -1, -4) + \lambda \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \quad \dots (1)$$

ليجدار نقطتي تقاطع الخط المستقيم (1) مع الكرة المعطاه عن المعادلة

$$\lambda^2 + 2 \left[\frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \cdot ((2, -1, -4) - (1, -3, -7)) \right] \lambda + [(2, -1, -4) - (1, -3, -7)]^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\sqrt{14} \lambda - 42 = 0 \quad \dots (2)$$

هنا جذرا المعادلة الأخيرة هما $\lambda_1 = \sqrt{14}$ و $\lambda_2 = -3\sqrt{14}$. بالتعويض في المعادلة

(1) نحصل على نقطتي تقاطع الخط المستقيم (1) مع الكرة المعطاه وهما :

$$\underline{P_1} = (2, -1, -4) + \sqrt{14} \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = (3, 1, -1)$$

$$\underline{P_2} = (2, -1, -4) - 3\sqrt{14} \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = (-1, -7, -13)$$

$$\therefore \underline{P_1b} = \underline{b} - \underline{P_1} = (5, 5, 5) - (3, 1, -1) = (2, 4, 6)$$

$$\underline{aP_1} = \underline{P_1} - \underline{a} = (3, 1, -1) - (2, -1, -4) = (1, 2, 3)$$

وبالتالي فإن $\underline{P_1b} = 2 \underline{aP_1}$ بالمثل يمكن إثبات الجزء الثاني .

٤.٣ : المستوى المماس لكرة عند نقطة ما :

نقصد أن "أ" نقطة على الكرة :

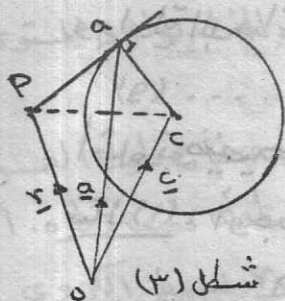
$$\underline{r}^2 - 2 \underline{r} \cdot \underline{c} + d = 0 \quad \dots (1)$$

من (٤.٢) نعلم أن نقطتي تقاطع الكرة مع الخط المستقيم المار بالنقطة "أ"

والتي هي $\underline{b}$ موجه له هما : $\underline{r_1} = \underline{a} + \lambda_1 \underline{b}$ و $\underline{r_2} = \underline{a} + \lambda_2 \underline{b}$ حيث

λ_1, λ_2 هما جذرا المعادلة :

$$\lambda^2 + 2(\underline{a} - \underline{c}) \cdot \underline{b} \lambda + \underline{a}^2 - 2 \underline{a} \cdot \underline{c} + d = 0 \quad \dots (2)$$



إذا كان أحد جذور المعادلة (2) ياوى صفراء،
فإن الشرط اللازم لكي يحس المتقيم الكرة هو
أن يتعبر الجذر الدّخر للمعادلة (2). أى أن
الشرط هو $b \cdot (a - c) = 0$

وهذه المعادلة الأخيرة تعني أن المماس عمودي شکل (٣) ∇
على نصف القطر الواصل من المركز للنقطة "هـ" (شکل (٣)). إذا كان
 $\underline{OP} = r$ ، حيث P أى نقطة على المماس للكرة عند النقطة "هـ". فإن
هذا الشرط الأخير يمكن كتابته على الصورة:

$$(\underline{r} - \underline{a}) \cdot (\underline{a} - \underline{c}) = 0 \quad \dots (3)$$

المعادلة (3) تمثل متوى يمر بالنقطة "a" وعمودى على نصف القطر $\overline{ac}$.
يسمى المتوى (3) بالمتوى المماس للكرة عند النقطة "a". وحيث أن "a"
نقطة واقعه على الكرة فإننا تحقق المعادلة (11) أى

$$\underline{a}^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d = 0 \Rightarrow \underline{a}^2 = 2\underline{a} \cdot \underline{c} - d \quad \dots (4)$$

١٠ المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة :

$$\underline{r} \cdot (\underline{a} - \underline{c}) - \underline{a}^2 - \underline{a} \cdot \underline{c} = 0 \quad // \quad \therefore \quad (5)$$

وبالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (5) ينتج أن :

$$\underline{r} \cdot (\underline{a} - \underline{c}) - 2\underline{a} \cdot \underline{c} + d - \underline{a} \cdot \underline{c} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{r} \cdot \underline{a} - (\underline{r} + \underline{a}) \cdot \underline{c} + d = 0 \quad \dots (6)$$

إذا كانت $p = (x, y, z)$, $a = (x_1, y_1, z_1)$ & $c = (-f, -g, -h)$ بالنبة
محاور متعامدة فإن المعادلة (6) تأخذ الصورة :

$$x, x+y, y+z, z + f(x+x_1) + g(y+y_1) + h(z+z_1) + d = 0 \dots (7)$$

إِذَا مَرَّتِ الْكُرَةُ (١) بِنَقْطَةِ الدُّخْلِ فَإِنْ $d = 0$ "وَتَكُونُ مُعَادِلَةُ الْمَوْسَى (٣) هِيَ

$$r \cdot c = 0 \quad \dots (8)$$

وبدلالة الإحداثيات الكارتيزية تأخذ المعادلة (8) الصورة :

$$px + qy + hz = 0 \quad \dots (9)$$

أضله توضيحيه :

مثال (1) : أوجد معادلتى المتوئيتى المماسين للكرة

$$x^2 - 2x - (1, 2, 1) = 39$$

عند نقطتي تقاطعها مع الخط المتقيم

$$\underline{r} = (5, 3, 1) + \lambda \frac{(1, 3, -2)}{\sqrt{14}}$$

الحل : لإيجاد نقطتي تقاطع الخط المتقيم المعطى مع الكرة المعطاه ، نعوض من

معادلة المتقيم فى معادلة الكرة فنحصل على المعادلة :

$$\lambda^2 + \sqrt{14} \lambda - 28 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{14} ; \lambda_2 = -2\sqrt{14}$$

بالتعريف عن λ فى معادلة الخط المتقيم المعطى يتبع أن :

$$(i) \underline{\lambda} = \lambda_1 :$$

$$\underline{r} = (5, 3, 1) + \sqrt{14} \frac{(1, 3, -2)}{\sqrt{14}} = (6, 6, -1) = P_1$$

$$(ii) \underline{\lambda} = \lambda_2 :$$

$$\underline{r} = (5, 3, 1) - 2\sqrt{14} \frac{(1, 3, -2)}{\sqrt{14}} = (3, -3, 5) = P_2$$

∴ معادلة المستوى المماس للسطح الكروى عند النقطة P_1 هى :

$$(\underline{r} - (6, 6, -1)) \cdot ((6, 6, -1) - (1, 2, 1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{r} \cdot (5, 4, -2) = 56 \quad \text{or} \quad 5x + 4y - 2z = 56$$

وأن معادلة المستوى المماس للسطح الكروى عند النقطة P_2 هى :

$$(\underline{r} - (3, -3, 5)) \cdot ((3, -3, 5) - (1, 2, 1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{r} \cdot (2, -5, 4) = 41 \quad \text{or} \quad 2x - 5y + 4z = 41$$

مثال (2) : أثبت أن المستوى $3x - 4z - 26 = 0$ ممس السطح الكروى

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z - 19 = 0$$

أوجد نقطة التماس ، وأوجد أيضا المستوى الدّخري الذي يوازي المستوى المعلوم ويمس السطح الكروي .

الحل : إذا كان هذا المستوى مماسا لهذا السطح الكروي فإن طول العمود النازل من مركز هذا السطح للمستوى لدي وأن يساوي نصف قطره . أي أن الشرط اللازم ل تماس المستوى

$$r^2 - 2rc + d = 0 \quad \text{هو} \quad r^2 - 2rc + d = 0$$

$$(c - b - d')^2 = c^2 - d$$

واضح هنا أن $d' = \frac{26}{5}$ ، $b = \frac{(3, 0, -4)}{5}$ ، $c = (-1, 2, -1)$

$$\therefore (c \cdot b - d')^2 = \left(-\frac{3}{5} + 0 + \frac{4}{5} - \frac{26}{5} \right)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$c^2 - d = 25$$

أن المستوى يمس هذا السطح الكروي . نقطة التماس هي نقطة تقاطع المستوى المماس مع العمود الساقط عليه من المركز ، وبالتالي فإن الصورة المتماثلة لهذا العمود هي :

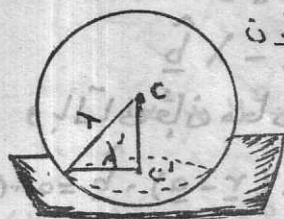
$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-4} = \lambda'$$

ومثلاً وبالتعويض في معادلة المستوى المعطى نحصل على أن $\lambda' = 1$. إذن نقطة التماس هي $(2, 2, -5)$. معادلة أي مستوى يوازي المستوى المعطى هي $3x - 4z + k = 0$. من الشرط اللازم لل تماس نجد أن $k = 24$ وبالتالي فإن معادلة المستوى المطلوب هي : $3x - 4z + 24 = 0$.

ملحوظة : إذا قطع المستوى الكروي $r \cdot b = d'$ الكرة $r^2 - 2rc + d = 0$ التي مركزها c ونصف قطرها λ . فإن المقطع يكون دائرة يمكن إيجاد معادلتها كالآتي :

1- نوجد معادلة المنظم العمودي على المستوى المعطى ومارة بالنقطة c :

$$r = c + \mu b$$



شكل (٤)

جـ- توجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوى القاطع ولكن نقطة "c" وهي مركز دائرة التقاطع المطلوبة.

د- إذا كانت λ هي طول نصف قطر دائرة التقاطع فإن

$$\lambda' = \sqrt{\lambda^2 - \|c - c'\|^2} \quad (\text{انظر شكل (4)})$$

هـ- تكون معادلة دائرة التقاطع هي $\|r - c'\|^2 = \lambda'^2$

تنويه: إذا مر المستوى القاطع بمركز الكرة فإن دائرة التقاطع تعرف

باسم الدائرة العظمى $\lambda = 0$

في 2: معادلة الكرة التي تمس مستوى معلوم عند نقطة ما والمعلوم نصف قطرها.

نفرض أن المطلوب إيجاد معادلة الكرة المعلوم نصف قطرها λ والتي

تمس المستوى $d = r \cdot \hat{b} = a$ عند النقطة "a" (شكل 5)

معادلة المستقيم المار بالنقطة "a" في اتجاه

العمودي للمستوى المعطى هي:

$$r = a + \mu \hat{b}$$

هذا المستقيم يمر بمركز الكرة أي أن

$$c = a + \mu \hat{b}$$

لقيمة معينة للوسيط μ . من هذا ينبثق أن

$$\|c - a\|^2 = \mu^2 = \lambda^2$$

من هذا نرى أنه يوجد قيمتان للوسيط μ أي يوجد كرتان مركبتان

$$c = a + \lambda \hat{b} \quad \& \quad c = a - \lambda \hat{b}$$

وبالتالي فإن معادلتى الكرتان هما:

$$(r - a + \lambda \hat{b})^2 = \lambda^2 \Rightarrow (r - a)^2 + 2\lambda(r - a) \cdot \hat{b} = 0 \quad (1)$$

مثال (1): أوجد معادلتيه الكرتية اللتان تمان المستوى

$$2x + 2y - z = 1 \quad \text{عند النقطة (1, 1, 5)}$$

ونصف قطر كل منها "ياوى 3".
الحل: بالتعويض في المعادلة (I) حيث

$$\hat{p} = \frac{(2, 2, -1)}{3} \quad ; \quad a = (5, 1, 1) \quad ; \quad \lambda = 3 \quad \text{فإن المعادلة (I)}$$

تأخذ الصورة:

$$(r - (5, 1, 1))^2 \pm 2(3)(r - (5, 1, 1)) \cdot \frac{(2, 2, -1)}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$(r - (5, 1, 1))^2 \pm 2(r - (5, 1, 1)) \cdot (2, 2, -1) = 0 \quad \text{وهما معادلتى الكرتين.}$$

سؤال (c): لإثبات أن معادلة الكرة الواقعة في الثمن الموجب من الفراغ وتمس متويات الإسناد الثلاثة ونصف قطرها "a" تكون على الصورة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x + y + z) + 2a^2 = 0$$

الحل: حيث أن متويات الإسناد الثلاثة تمس الكرة المطلوبة، فإنه

ينتج أن بعد كل منها عن مركز الكرة "c" "ياوى نصف القطر "a".

إذن $c = (a, a, a)$ وبالتالي فإن معادلة الكرة المطلوبة هي:

$$r^2 - 2r \cdot (a, a, a) + \overbrace{(a, a, a)}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x + y + z) + 2a^2 = 0$$

سؤال (3): إثبات أن معادلتى الكرتين المارين بالنقط $(2, -3, 4)$, $(4, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$

وتقسمان المسوى $2x + 2y - z = 11$ هما

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

$$\& \quad 16(x^2 + y^2 + z^2) - 102x + 50y - 49z + 86 = 0$$

الحل: نفرض أن معادلة الكرة على الصورة

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2fx + 2gy + 2hz + d = 0$$

بالتعويض بتلك النقط في الكرة نحصل على:

$$(1, 0, 0): 1 + 2f + d = 0 \dots (1) \quad \& \quad (4, 1, 0): 17 + 8f + 2g + d = 0 \dots (2)$$

$$(2, -3, 4): 29 + 4f - 6g + 8h + d = 0 \dots (3)$$

شروط تماس المستوى المعطاه مع الكرة هو:

$$\left(\frac{2f+2g+2h+d}{3} \right)^2 = f^2 + g^2 + h^2 - d \quad \dots (4)$$

عمل المعادلات (4) $\rightarrow$ (1) نحصل على

$$(I) \quad f = -3; g = 1; h = -2 \text{ \& } d = 5 \text{ وبالتالي فإن معادلة}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z = 5 \text{ الكرة هي:}$$

$$(II) \quad f = \frac{-51}{16}; g = \frac{25}{16}; h = \frac{-49}{32} \text{ \& } d = \frac{86}{16} \text{ وبالتالي فإن معادلة}$$

$$16(x^2 + y^2 + z^2) - 102x + 50y - 49z + 86 = 0 \text{ الكرة هي:}$$

٤.٥: عائلة السطوح:

نعلم من دراستنا في المستوى أن المعادلة $f(x, y, z) = 0$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ تمثل منحنى إذا كانت الكمية الحقيقية λ ثابتة، أما إذا كانت λ متغيرة فإن هذه المعادلة تمثل عائلة من المنحنيات.

أما من دراستنا في الفراغ نعلم أن المعادلة $F(x, y, z, \lambda) = 0$ تمثل سطحاً إذا كانت قيمة λ ثابتة بينما تمثل عائلة من السطوح في حالة λ متغيرة. لأن هذه المعادلة تمثل لكل قيمة من قيم الوسيط λ سطحاً في الفراغ. هذه السطوح تسمى عائلة السطوح.

ننظر أن $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ يملكون معاً فإن المعادلة

$$\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$$

تمثل لكل قيمة من قيم λ :

- ١- مستوياً بخط تقاطع هذان المستويان في حالة تقاطعها ونقول أن هذه المعادلة تمثل عائلة من المستويات المارة بخط تقاطع هذان المستويين
- ٢- مستوياً لهذين المستويين في حالة توازيهما ونقول أن هذه المعادلة تمثل عائلة من المستويات الموازية للمستويين $\pi_1 = 0 \text{ \& } \pi_2 = 0$

مثال (١١): أوجد معادلة المستوى المار بنقطة تقاطع المستويين

$$3x - 7y + z + 2 = 0 \quad \& \quad 8x + 9y + z + 14 = 0$$

إذا كان هذا المستوى

(١) ماراً بنقطة الذيل .

(٢) عمودى على المستوى $z = 0$.

الحل: معادلة عائلة المستويات المارة بنقطة تقاطع المستويين المعطيين هي:

$$(3x - 7y + z + 2) + \lambda(8x + 9y + z + 14) = 0 \Rightarrow$$

$$(3 + 8\lambda)x + (-7 + 9\lambda)y + \lambda z + 2 + 14\lambda = 0 \quad \dots (١)$$

(١) إذا مر المستوى المطلوب بنقطة الذيل فبوضع $x=0, y=0, z=0$

في المعادلة (١) نحصل على $\lambda = -1/7$ وبالتالي فإن معادلة المستوى

$$13x - 58y - z = 0$$

المطلوب هي:

(٢) إذا كان المستوى المطلوب عمودياً على المستوى $z = 0$ فإن النتيجة

(١) $(3 + 8\lambda, -7 + 9\lambda, \lambda)$ العمودى على المستوى المطلوب يكون عمودياً

على النتيجة (١) $(0, 0, 1)$ العمودى على المستوى $z = 0$ أى أن

$$\lambda = 0 \Rightarrow (0) + (0) + (1)\lambda = 0$$

وبالتالى فإن معادلة المستوى المطلوب هي $3x - 7y + z = 0$

مثال (١٢): أوجد معادلة المستوى الموازى للمستويين

$$r \cdot (2, -3, 1) + 1 = 0 \quad \& \quad r \cdot (4, -6, 2) + 7 = 0$$

والمار بالنقطة $(1, 1, 1)$.

الحل: معادلة عائلة المستويات المطلوبة هي:

$$r \cdot (2, -3, 1) + 1 + \lambda(r \cdot (4, -6, 2) + 7) = 0 \Rightarrow$$

$$r \cdot (2 + 4\lambda, -3 - 6\lambda, 1 + 2\lambda) + 1 + 7\lambda = 0 \quad \dots (١)$$

ويجب ملاحظة أن المعادلة (١) تمثل لكل قيمة من قيم λ ، عدا $\lambda = -\frac{1}{2}$ ، مستوي

موازي للمستويين المعطيين . حيث أن المستوى المطلوب يمر بالنقطة (1, 1, 1).
إذن بالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن

$$\Rightarrow 1 + 7\lambda = 0 \quad (2\lambda + 1, -3 - 6\lambda, -2 + 4\lambda) \cdot (1, 1, 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1/7 \quad 7\lambda + 1 = 0$$

وبالتالي فإن معادلة المستوى المطلوب هي $\pi: (1, -3, 2) \cdot (x, y, z) = 0$
مما سبق ومن الأمثلة المعطاه يتضح لنا أنه إذا علمت هوية المستويين $F_1 = 0, F_2 = 0$ فقد يكون باعطائنا استنباط شيء عن هوية عائلة

$$\text{السطوح} \quad F_1 + \lambda F_2 = 0$$

فقد شاهدنا أنه إذا كان $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ متويين متقاطعين فإن $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ تمثل عائلة المستويات المارة بنقط تقاطع المستويين $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ لدى قيمة من قيم λ (مثال (1))

كذلك قد شاهدنا أنه إذا كان $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ متويين متوازيين فإن $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$ تمثل عائلة المستويات الموازية للمستويين $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ لدى قيمة من قيم λ فيما عدا ربعا قيمه واحدة (مثال (2))
أما إذا كان $F = 0$ يمثل كرة، $\pi = 0$ يمثل مستوى فإن لمعادلة $F + \lambda \pi = 0$

تمثل بصفة عامة كرة تمر بدائرة تقاطع المستوى المعطى مع الكرة المعطاه.

سؤال (3): أوجد معادلتى الكرتين التي تمر كل منهما بالدائرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \quad \& \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{وتمر كل منهما بالمستوي}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 15$$

الحل: معادلة أي كرة تمر بالدائرة المعطاه هي

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3) = 0$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x(-\lambda/2) - 2y(\lambda/2) - 3\lambda = 0 \quad \dots$$

نصف القطر = $\sqrt{\frac{7}{2}\lambda^2 + 3\lambda + 5}$ وإحداثيات المركز $(-\lambda, -\lambda, -\frac{3}{2}\lambda)$
 : شرط تقاس الكرة (1) مع المستوى المعطى هو أن يكون طول الشع
 الساقط من مركز تلك الكرة على المستوى مساوياً لنصف قطر هذه الكرة.
 أي أن

$$\left(\frac{7}{2}\lambda + 3\lambda + 5\right) = \left(\frac{-2\lambda - 3\lambda - 15}{5}\right)^2 = (\lambda + 3)^2 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ أو } -\frac{4}{5}$$

إذن معادلتى الكرتين هما

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ و } 5x^2 - 4x - 13 = 0$$

٤.٥ : مستوى تقاطع كرتين:

إذا كان

$$S_1 = x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ و } S_2 = 5x^2 - 4x - 13 = 0$$

سطحين كرويين فإن المعادلة

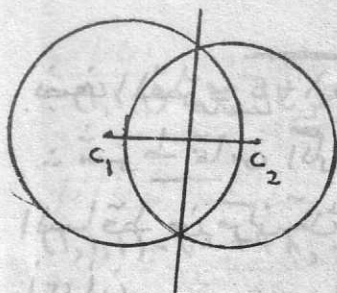
$$S_1 + \lambda S_2 = 0 \Rightarrow (1 + \lambda)x^2 - 2x + (1 + \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda} = 0$$

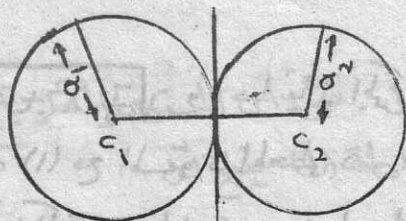
تمثل بصفه عامه كرة عندما $\lambda \neq -1$. كما أننا قد تمثل نقطة أو المجموعة
 الخالية. ولو أن هذا لن يحدث إذا كان السطحين الكرويين متقاطعين
 ولكن الحالة الأهم تلك التي نختار فيها $\lambda = -1$. في هذه الحالة
 تمثل المعادلة :

$$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 2x + 14 = 0 \Rightarrow x = -7$$

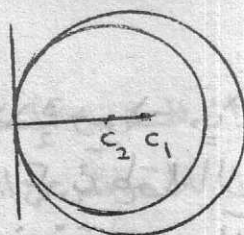
مستوى. هذا المستوى يحتوى دائرة تقاطع الكرتين إذا كانا متقاطعين
 ويسمى مستوى تقاطع الكرتين، ويسمى المستوى المماس المشترك
 إذا كانت الكرتين قماسيتين كما في شكل (٦)



$$c_1c_2 < a_1 + a_2$$



$$c_1c_2 = a_1 + a_2$$



$$c_1c_2 < a_1 \quad (\text{مثلا})$$

شكل (٦)

مثال (٤): أوجد معادلة مستوى تقاطع الكرتين

$$x^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \quad \& \quad x^2 - 2x - 2y - 2z = 0$$

الحل: بطرح المعادلتين نحصل على معادلة مستوى تقاطع الكرتين وهي

$$2x - 2y - 2z = 0 \Rightarrow x - y - z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

مثال (٥): أوجد معادلة الكرة التي تمر بتقاطع الكرتين

$$x^2 - x - 6y - 5z = 11 \quad \& \quad x^2 - x - 4y - 1z = 3$$

والتي يقع مركزها على المستوى $x - y - z = 0$

الحل: معادلة عائلة الكرات المارة بتقاطع الكرتين المعطيتين هي:

$$(x^2 - x - 6y - 5z - 11) + \lambda (x^2 - x - 4y - 1z - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - \frac{6 - \lambda}{1 + \lambda}y - \frac{5 + 4\lambda}{1 + \lambda}z - \frac{11 + 3\lambda}{1 + \lambda} = 0; \lambda \neq -1, \dots, 11$$

وبالتالي فإن مركز أي كرة من العائلة (١) هو

$$C = \left(\frac{6 - \lambda}{2(1 + \lambda)}, \frac{-5 + 4\lambda}{2(1 + \lambda)}, \frac{2 + \lambda}{2(1 + \lambda)} \right)$$

الكرة المطلوبة تقع مركزها على المستوى

$$x - y - z = 0$$

$$3(6 - \lambda) - (-5 + 4\lambda) + 2(2 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -7$$

التعويض في (١) عن قيمة $\lambda = -7$ نحصل على معادلة الكرة المطلوبة:

$$r^2 + r \cdot \left(\frac{13, -33, -5}{6} \right) + \frac{16}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$6r^2 + r \cdot (13, -33, -5) + 32 = 0$$

٤.٦ : المستوى الأساسي :

في البند (٤.٥) رأينا أنه يمكن الحصول على متو كارتباط خطي من كرتين وذلك بإختيار $\lambda = -1$. هذا المستوى هو مستوى التقاطع للكرتين إذا كانا متقاطعتان و المستوى المماس المترك لهما إذا كانا قمتان. إذا لم تكن الكرتان متقاطعتان (أو قمتان) فإنه فازال بإمكاننا الحصول على متو كارتباط خطي من معادلتى الكرتين وإعطاء هذا المستوى معنى هندسي كذلك .

نفرض الكرتان هما

$$S_1 = r^2 - 2r \cdot c_1 + d_1 = 0 \text{ \& } S_2 = r^2 - 2r \cdot c_2 + d_2 = 0$$

المعادلة $S_1 + \lambda S_2 = 0$ عندما $\lambda = -1$ تمثل المستوى :

$$S_1 - S_2 = 2r \cdot (c_1 - c_2) + d_1 - d_2 = 0 \dots (1)$$

نقط المستوى (١) تحقق العلاقة $S_1 = S_2$ أي أنه إذا كانت

"أ" إحدى نقط هذا المستوى فإن

$$a^2 - 2a \cdot c_1 + d_1 = a^2 - 2a \cdot c_2 + d_2 \dots (2)$$

وبذلك الطرف اليمين من المعادلة (١) يساوي مربع طول المماس المرسوم من النقطة "أ" للكرة $S_1 = 0$ إذا كانت "أ" نقطة

خارج هذه الكرة. أيضا الطرف اليمين من (١) يساوي مربع طول

المماس المرسوم من النقطة "أ" للكرة $S_2 = 0$ إذا كانت "أ" نقطة

خارج هذه الكرة .

من هذا يتضح لنا أن أجزاء المستوى (١) التي تقع نقطها خارج كلتا

الكرتين (المستوى بأكمله في حالة عدم تقاطع الكرتين) تتكون من نقطتين تكون أطوال المماسات المرسومة منها لقطب الكرتين متساوية.
المستوى (١) يسمى المستوى الأساسي للكرتين $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$

نظرية (١) :

المستوى الأساسي للكرتين يكون عموديا على الخط الواصل بين مركزي الكرتين
البرهان : من المعادلة

$$2r_1(c_1 - c_2) + d_1 - d_2 = 0$$

نجد أن المجه $c_1 - c_2$ يكون في الاتجاه العمودي للمستوى الأساسي.
ولكن المجه $c_1 - c_2$ يكون في اتجاه الخط الواصل بين مركزي الكرتين.
نظرية (٢) :

المستويات الأساسية لثلاث كرات مأخوذة من مثنى مثنى إما أن تكون متقاطعة في خط مستقيم واحد أو تكون متوازية.
البرهان : نفرض أن $S_1 = 0$ ، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 0$ ثلاث كرات.
المستويات الأساسية هي :

$$S_1 - S_2 = 0 \quad S_2 - S_3 = 0 \quad S_1 - S_3 = 0 \quad \text{ولكن } \lambda = 1 :$$

$$S_1 - S_3 = (S_1 - S_2) + \lambda(S_2 - S_3)$$

وهذا يعني أن المستوى الأساسي $S_1 - S_3 = 0$ يمر بـ خط تقاطع المستويين الأساسيين الآخرين إذا كانا متقاطعين أو يكون موازيا لهما إذا كانا متوازيين .

يسمى خط تقاطع المستويات الأساسية لثلاث كرات بالمحور الأساسي للكرات الثلاثة .

نتيجة : مستويات التقاطع لثلاث كرات متقاطعة مثنى مثنى إما أن تكون متقاطعة في خط مستقيم أو تكون متوازية

تعريف: نفرض أن Π مستوى مجموعة الكرات التي يكون
أساسي لكل كرتين منها تسمى عائلة الكرات المتحدة المحور
نظرية (٣):

إذا كان $S_1 = 0$ ، $S_2 = 0$ فإن مجموعة الكرات

$$S_1 + \lambda S_2 = 0 \quad \lambda \neq -1$$

تكون عائلة من الكرات المتحدة المحور.
البرهان: نفرض أن

$$S_1 + \lambda_1 S_2 = 0 \quad \& \quad S_1 + \lambda_2 S_2 = 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq -1$$

كرتين من كرات هذه العائلة. المستوى الأساسي لواتين كرتين

$$(S_1 + \lambda_1 S_2) + \lambda (S_1 + \lambda_2 S_2) = 0 \Rightarrow$$

$$S_1 + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda \lambda_2}{1 + \lambda} \right) S_2 = 0 \quad \lambda = -1$$

نحار λ بحيث يكون.

$$\frac{\lambda_1 + \lambda \lambda_2}{1 + \lambda} = -1 \quad \text{ومما يتبع أن} \quad -\lambda = \frac{1 + \lambda_1}{1 + \lambda_2}$$

وحيث أن $\lambda_1, \lambda_2 \neq -1$ فإنه توجد قيمة وحيدة λ غير ماويه

للصفر وهذا يعني أن $S_1 - S_2 = 0$ هو المستوى الأساسي لكل

كرتين من كرات العائلة $\lambda \neq -1$ ؛ $S_1 + \lambda S_2 = 0$.

يتمسنا الآن تعميم نظريه (١) كالآتي

نظرية (٤):

مراكز كل كرات عائلة من الكرات المتحدة المحور تقع على

خط متقيم عمودي على المستوى الأساسي.

ويجب ملاحظة أن حول المماس المرسوم من أي نقطة على

المستوى الأساسي لعائلة من الكرات المتحدة المحور لذي كرة

من كرات العائلة يكون لها نفس الطول.

كما يجب أن نلاحظ أنه لايجاد العلاقة بين كرتين نوجد طول العمود من مركز إحدى الكرتين للمستوى الأساسي فإن كان :
(١) طول العمود أصغر من نصف قطر الكرة فإن الكرتين تكونان متقاطعتان
(٢) طول العمود أكبر من نصف قطر الكرة فإن الكرتين تكونان غير متقاطعتان .

(٣) طول العمود يساوي نصف قطر الكرة فإن الكرتين تكونان متماسكتان . وسوف نفرق هنا بين حالتان :

(١) إذا كان $\|C_1 + C_2\|$ = مجموع نصف القطرين للكرتين فإن التماس يكون من الخارج (انظر شكل (١٦)).

(٢) إذا كان $\|C_1 + C_2\|$ أقل من إحدى نصف قطر الكرتين فإن التماس يكون من الداخل (انظر شكل (١٦)).

مثال (٦) : تحقق من أن المقويات الأساسية للكرات

$$x^2 = 16 \dots (1) \quad \& \quad x^2 - 2x \cdot (2, 0, -5) + 11 = 0 \dots (2)$$

$$3x^2 - 2x \cdot (13, 14, -1) + 47 = 0 \dots (3)$$

تتقاطع في خط متين .

الحل : المستوى الأساسي للكرتية (٢) (١) هو :

$$2x \cdot (2, 0, -5) = 27 \dots (4)$$

المستوى الأساسي للكرتية (٣) (٢) هو :

$$2x \cdot (7, 14, 14) = 14 \dots (5)$$

المستوى الأساسي للكرتية (٣) (١) هو :

$$2x \cdot (13, 14, -1) = 95 \dots (6)$$

من الواضح أن هذه المستويات الثلاثة ليست متوازية وبالتالي
وأن تكون متقاطعة في خط متقيم. للتأكد من ذلك، نوجد معادلات

عادلة المستويات الثلاثة بخط تقاطع المستويين (5) و (4) أي

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) - \lambda(2, 0, 5) - 27 = 0 \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (1 + 4\lambda, 2, 2 - 10\lambda) \quad \dots (7)$$

للوصول على قيمة λ ، نقارن معاملات المعادلة (7) مع معاملات
المعادلة (6):

$$\frac{1 + 4\lambda}{26} = \frac{2}{28} = \frac{2 - 10\lambda}{-2} \xrightarrow{\text{النسبة الأولى والثانية}} \lambda = 3/14$$

بالتعويض في المعادلة (7) نحصل على المعادلة

$$2x - (13, 14, -1) = 95 \quad \text{وهي المعادلة (6).} \quad \text{ثبت المطلوب.}$$

سؤال (7): أوجد المستوى الأساسي للكرتين

$$S_1 = x^2 + 2x - (0, 3, 1) + 8 = 0 \quad \dots (1)$$

$$S_2 = x^2 + 2x - (3, 4, 2) = -20 \quad \dots (2)$$

ما هي العلاقة بين هاتين الكرتين؟

الحل: معادلة المستوى الأساسي للكرتين (1) و (2) هي:

$$x - (3, 1, 1) + 6 = 0 \quad \dots (3)$$

لدينا العلاقة بين هاتين الكرتين نوجد طول العمود الساقط من مركز
أحدى الكرتين للمستوى الأساسي (3):

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \approx 1.4 \quad \text{هو } S_1 = 0 \quad \text{ونصف قطرها } c(0, -3, -1)$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \text{هو } S_2 = 0 \quad \text{ونصف قطرها } c(-3, -4, -2)$$

طول العمود من النقطة c للمستوى (3) يساوي

$$\frac{(0, -3, -1) \cdot (3, 1, 1) + 6}{\sqrt{11}} = \frac{-3 - 1 + 6}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \approx 0.6 < \lambda_1$$

وهذا يعني أن الكرتين $S_1 = 0, S_2 = 0$ متقاطعتان .

تمارين عامة

① بين أي المعادلات التالية تمثل سطح كروي وفي هذه الحالة أوجد للكرة سطح مركزه ونصف قطره .

(i) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 9 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$

(iii) $\underline{r}^2 - 2\underline{r} \cdot (0, 2, -1) - 30 = 0$

(iv) $\underline{r}^2 + 2\underline{r} \cdot (3, -4, 7) + 72 = 0$

(v) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

(vi) $16\underline{r}^2 - 8\underline{r} \cdot (3, 8, -2) + 41 = 0$

② أوجد طول جزء المقيّم $\underline{r} = (5, 3, -2) + \lambda(1, 3, -2)$

المقطوع بالسطح الكروي $\underline{r}^2 - 2\underline{r} \cdot (1, 2, 1) = 8$. أوجد كذلك

معادلة السطح الذي فيه تقطعت التقاطع نهائيًا بقطر .

③ أوجد معادلة الكرة التي تمر بالنقطة $(2, 5, 0)$ وتمس المستوى

$1 = 0$ عند الطرف الآخر للقطر المار بهذه النقطة .

④ أوجد مركز ونصف قطر دائرة تقاطع المستوى

مع السطح الكروي $\underline{r} \cdot (2, -1, 2) = 21$

⑤ أوجد معادلة السطح الذي فيه هذه الدائرة غطي . $\underline{r}^2 - 2\underline{r} \cdot (2, -2, 6) = 1$

⑥ أوجد معادلتى السطحين الكرويين اللذان يمر كل منهما بالدائرة

$\underline{r}^2 = 1, \underline{r} \cdot (2, 4, 3) = 6$

ويعبر المستوى $z = 0$

٦- أوجد إحداثيات مركز ونصف قطر الدائرة

$$r^2 - r \cdot (2, 4, 4) = 13 \quad \text{و} \quad r \cdot (2, -1, -2) = 13$$

أوجد كذلك معادلتى المستويين المماسين للسطح المعطاه والموازيين للمستوى المعطى .

٧- أوجد معادلة السطح الكروي الذى يمر بالمستوى

$$r \cdot (3, 2, -1) + 2 = 0$$

عند النقطة $(1, -2, 1)$ ويقطع السطح الكروي

$$r^2 - r \cdot (4, -6, 0) + 4 = 0$$

على التفاضل .

٨- إذا كان $a = 5a, b = 5b, c = 5c$ هي إحداثيات مواضع

النقط a, b, c على الترتيب بالنسبة لنقطة المصل $(0, 0, 0)$

فأثبت أن معادلة السطح الكروي المار بالنقط a, b, c هي

$$r^2 - r \cdot (a, b, c) = 0$$

هي

٩- أثبت أن كل سطح كروي يمر بالدائرة

$$r^2 - r \cdot (2a, 0, 0) + \lambda^2 = 0 \quad ; \quad z = 0$$

يقطع كل سطح كروي يمر بالدائرة

$$r^2 = \lambda^2 \quad ; \quad y = 0$$

على التفاضل .

١٠- إذا أجمع المقيم المار بالنقطتين

$$a(2, -1, -4) \quad ; \quad b(5, 5, 5)$$

السطح الكروي

$$r^2 - 2r \cdot (1, -2, -7) + 3 = 0$$

في النقطتين c, d ، فإنَّية أن

$$\underline{cb} = 2 \underline{ac}, \quad \underline{db} = -2 \underline{ad}$$

١١- أوجد المستوى النشائي للطين الكرويين

$$S_1 = x^2 + 2x \cdot (0, 3, 1) + 8 = 0,$$

$$S_2 = x^2 + 2x \cdot (3, 4, 2) + 20 = 0.$$

ما هي العلاقة بين هذين الطين الكرويين؟

الباب الخامس

السطوح الشايبة Quadric Surfaces

(٥.١) مقدمة

في الفراغ ذو الثلاثة ابعاد يجب ملاصقة أن هناك نوعين من المجال الهندسيه:
(٢) السطح : وهو المجال الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ بحيث تحقق المعادلة

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{أو} \quad F(r) = 0$$

حيث r متجه الموضع للنقطة (x, y, z) بالنسبة إلى $(0,0,0)$
مثال ذلك

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0 \quad (\text{كرة})$$

$$2x + 3y + 4z - 5 = 0 \quad (\text{مستوى})$$

(ب) المثنى : وهو المجال الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ بحيث تحقق المعادلتين

$$F_1(r) = 0 \quad \& \quad F_2(r) = 0$$

مثال ذلك

$$F_1(r) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{دائرة تقاطع الكرة} \\ \text{بالمستوى} \end{array}$$

$$F_2(r) = 2x + 3y + 4z - 5 = 0$$

كما أن يلاحظ الطالب بأن أي متغير يمكن تمثيله وسيطيا (بارامتريا) باستخدام وسيط (بارامتر) واحد، فالمثنى الفراغي يمكن تمثيله وسيطيا بثلاث معادلات على الصورة:

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda) \quad \text{حيث } \lambda \text{ متغير الوسيط.}$$

ومن ثم فإن متجه الموضع r لن أي نقطة على المثنى الفراغي يكون على الصورة

$$r = r(\lambda) = \langle x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda) \rangle$$

مثال ذلك

$$x = 2 + 3\lambda, \quad y = -1 + \lambda, \quad z = 2\lambda \quad (\text{خط مستقيم})$$

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = 0 \quad (\text{دائرة تقاطع الكرة } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ مع المستوى } z = 0)$$

أما بالنسبة للسطح فإن نحل وسيطيا باستخدام متغيرين وسيطين مستقلين θ, ϕ متدا على الصورة

$$x = x(\theta, \phi), \quad y = y(\theta, \phi), \quad z = z(\theta, \phi)$$

ومن ثم فإن متجه الموضع r لن أي نقطة على السطح يكون على الصورة

$$r = r(\theta, \phi) = \langle x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi) \rangle$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_1a_2x^2 + b_1b_2y^2 + c_1c_2z^2 +$$

$$(a_1b_2 + a_2b_1)xy + (b_1c_2 + b_2c_1)yz +$$

$$(c_1a_2 + c_2a_1)zx + (d_1a_2 + d_2a_1)x +$$

$$(d_1b_2 + d_2b_1)y + (d_1c_2 + d_2c_1)z + d_1d_2 = 0$$

$$a_1a_2 = a_1^2 \quad b_1b_2 = b_1^2$$

$$c_1c_2 = c_1^2 \quad a_1b_2 + a_2b_1 = 2b_1^2$$

$$b_1c_2 + b_2c_1 = 2b_1c_1 \quad c_1a_2 + c_2a_1 = 2c_1a_1$$

$$d_1a_2 + d_2a_1 = 2d_1a_1$$

$$d_1b_2 + d_2b_1 = 2d_1b_1$$

$$d_1c_2 + d_2c_1 = 2d_1c_1 \quad d_1d_2 = d_1^2$$



- ٥٨ -

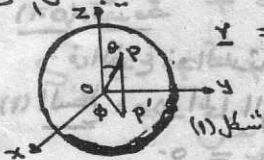
نجد، متجه الموضع $\underline{r}$ لدى نقطة على الكرة (شكلا (١)) يمكن أن يكتب على الصورة

$$\underline{r} = \langle a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta \rangle$$

حيث θ الزاوية بين $\underline{r}$ ومحور السينات،

ϕ الزاوية بين محور السينات ومتجه موضع

نقطه على المستوى



شكل (١)

(٥-٢) السطح الثاني: (x, y, z) نقطة على سطح

المعادلة العامة من الدرجة الثانية في (x, y, z)

$$F(\underline{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lxy + 2myz + 2n zx + 2fx + 2gy + 2hz + d = 0 \dots (1)$$

تمثل سطحي يسمى سطحا ثنائيا: (x, y, z) نقطة على سطح

$$(ii) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 9 = 0 \quad \text{كرة}$$

$$\text{حيث } a=b=c=1, \quad l=m=n=0, \quad f=-1, \quad g=-2, \quad h=-3$$

$$(iii) \quad \{(x, y, z): x^2 + y^2 = a^2\} \quad \text{(الطوائف دائرية قائمه نصف قطرها)}$$

$$(iii) \quad \{(x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \quad \text{(سطح ناقص)}$$

أحيانا يُعرف هذا السطح السطح المخروطي حيث المعنى الناتج من تقاطع هذا السطح مع المستوى يكون دائما قطعاً مخروطياً.

$$\text{فمثلا، تقاطع السطح الناقص } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ بالمستوى } z=0 \text{ يكون}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{تقاطع مستقيم مع سطح ثنائي (أنظر ص ٧٩)}$$

نفرض ان معادلة الخط المستقيم هي

$$\underline{r} = \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

وان معادلة السطح الثاني هي

$$F(\underline{r}) = 0 \quad (2)$$

حيث أن نقط تقاطع السطح الثاني مع الخط المستقيم تحقق طلا من معادليتها،

فإنه ينبع أن:

$$F(\underline{a} + \lambda \underline{b}) = 0 \quad (3)$$

المعادلة (3) من الدرجة الثانية في λ وجعلها التعريف في (١) نحصل على نقطتي تقاطع.

- 59 -

مثال (1) : أوجد نقط تقاطع الخط المتقيم المار بالنقطتين $(4, -5, -2)$ و $(-1, 5, 3)$

$$\text{مع السطح الثاني } 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$$

الحل : معادلة الخط المتقيم هي

$$\vec{r} = (4, -5, -2) + \lambda [(-1, 5, 3) - (4, -5, -2)]$$

$$= (4, -5, -2) + \lambda (-5, 10, 5)$$

وبالتالي فإن صورته البارامترية هي

$$x = 4 - 5\lambda, \quad y = -5 + 10\lambda, \quad z = -2 + 5\lambda$$

نفوض في معادلة السطح لندرجا نقطتي التقاطع :

$$2(4-5\lambda)^2 + 3(-5+10\lambda)^2 - 4(-2+5\lambda)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$10\lambda^2 - 60\lambda + 90 = 0 \Rightarrow \lambda = 3, 3$$

$$\therefore x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$$

أي أن الخط المتقيم يقابل السطح في نقطتين منطبقتين إحداها (1, 1, 1).

أي أن الخط المتقيم يمس السطح عند النقطة (1, 1, 1).

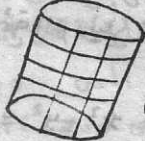
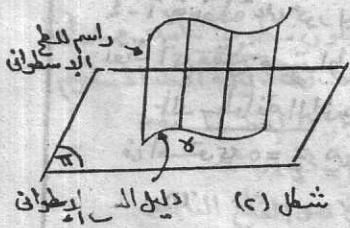
(2-5) : السطح الإسطواني :

نفرض أن لا منحني مستقيم في مستوى π إذا رسمنا من جميع نقط المنحنى خطوطا متقيمة متوازية (ليست موازية للمستوى π) فإن هذه المستقيمات تولد سطحاً يعرف بالسطح الإسطواني .

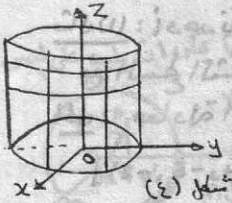
أي أن السطح الإسطواني هو المحل الهندسي لمستقيم يتحرك في الفراغ موازياً مستقيماً ثابتاً وقاطعاً لمنحنى معين مستو .

المنحنى المستوي لا يسمى دليل السطح الإسطواني كما أن كل قط من هذه الخطوط المستقيمة يسمى مولد أو رأس للسطح الإسطواني (شكل 3)

وإذا كان المليل دائرياً فإن الإسطوانة تسمى إسطوانة دائرية (شكل 3)

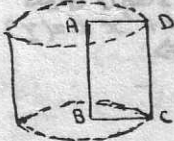


وإذا كان الدليل دائرة وكانت الراس عمودية
على مستواها سميت الد سطوانه دائرية قائمة
(شكل ٤٤)



شكل (٤٤)

المحنى الناشئ من تقاطع السطح الد سطوانى ومستوى يوازي المستوى π
يسمى مقطع مستوى للسطح الد سطوانى ويكون مطابقا للدليل السطح الد سطوانى لا
ويمكن تصور تولد الد سطوانه الدائرية القائمة من دوران مستطيل حول أحد
أضلاع دونه كاملة (شكل ٥٥)



شكل (٥٥)

فإذا دار المستطيل ABCD حول ضلعه AB دونه
كاملة فينتج من دورانه اسطوانه دائرية قائمة .
ويسمى الضلع المأبى AB محور الد سطوانه . الضلع
المحرك CD مولد الد سطوانه . ويظل الضلع CD أثناء الدوران موازيا لمحور
AB حيث أنه أثناء الدوران يكون AD دائما عموديا على المحور AB ، أي أنه
يتحرك في مستوى عمودى على AB ، وتتحرك النقطة D على محيط دائرة في هذا المستوى
مركزها A ، بينما تتحرك النقطة C على محيط دائرة مركزها B في المستوى العمودى
على المحور مارا بالنقطة B .

وفيما يلي نذكر بعض خواص الد سطوانه الدائرية القائمة :

١- مقطع الد سطوانه الدائرية القائمة بمستوى عمودى على محورها يكون دائما دائرة
وطابقة لدائرة الدليل .

٢- مقطع الد سطوانه الدائرية القائمة بمستوى يوازي محورها هو مستطيل .

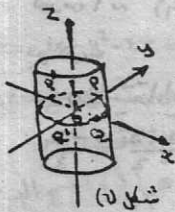
٣- محور الد سطوانه الدائرية القائمة ينصف أى مستقيم يقطعه وينتهى طرفاه بسطحيه .

٤- أية نقطة على محور الد سطوانه الدائرية القائمة تكون على بعدا متساوية من
نقط أى مقطع مستوئلى .

الد سطوانه الدائرية القائمة التى دليلها الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$
في المستوى $z = 0$ هي

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2\} \quad (1)$$

المعادلة

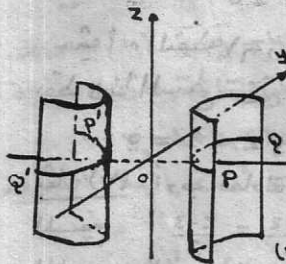


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (2)$$

في المستوى $z=0$ تمثل قطعاً ناقصاً $PQ P'Q'$ (شكل (٦))
فيه $|OP|=a, |OQ|=b$ أما في الفراغ فإن

$$\{(x, y, z): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

تمثل سطحاً اسطوانياً (شكل (٦)) رؤسها توازي محور العيّنات ودليله القطع الناقص $PQ P'Q'$ ويطلق عليها اليد سطوانة الناقصة.
المعادلة

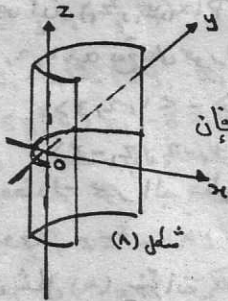


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots (3)$$

في المستوى $z=0$ تمثل قطعاً زائداً $PQ P'Q'$ (شكل (٧))
أما في الفراغ فإن

$$\{(x, y, z): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

تمثل سطحاً اسطوانياً (شكل (٧)) رؤسها توازي محور العيّنات ودليله هو القطع الزائد $PQ P'Q'$ ويطلق عليها اليد سطوانة الزائدية.
المعادلة



$$y^2 = 4ax \quad \dots (4)$$

في المستوى $z=0$ تمثل قطعاً مكافئاً، أما في الفراغ فإن

$$\{(x, y, z): y^2 = 4ax\}$$

تمثل سطحاً اسطوانياً رؤسها توازي المحور العيني ودليله القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ كما في شكل (٨) ويطلق عليها اليد سطوانة المكافئة.

ويجب ملاحظة أنه ليس لكل السطوح اليد سطوانية تكون سطوحاً ثانية. فمثلاً إذا
المختل لا في المستوى Π هذا متقيماً فإن المحور يكون متوي دليله الخط المستقيم
مثال (٩): أوجد معادلة اليد سطوانة التي رؤسها توازي الخط المستقيم
الذي له معادلة $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ودليله المختل $x^2 + 2y^2 = 1, z=0$
الحل: لاحظ أن Π هو المستوى $z=0$ ، الدليل لا هو القطع الناقص
في المستوى Π $x^2 + 2y^2 = 1$

نفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ نقطة على سطح الإسطوانة. إذن معادلة الإسطوانة

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{-2} = \frac{z-z_1}{3}$$

وهنا يتقاطع مع المحور $z=0$ ، $x^2+2y^2=1$ أي

$$x^2+2y^2=1 \text{ حيث } \frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{-2} = \frac{-z_1}{3}$$

$$x = x_1 - \frac{z_1}{3}, \quad y = y_1 + \frac{2z_1}{3}$$

$$(x_1 - \frac{z_1}{3})^2 + 2(y_1 + \frac{2z_1}{3})^2 = 1 \Rightarrow (3x_1 - z_1)^2 + 2(3y_1 + 2z_1)^2 = 9$$

$$9x_1^2 + 18y_1^2 + 9z_1^2 - 6x_1z_1 + 24y_1z_1 - 9 = 0$$

حيث أن النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ أي نقطة على السطح الإسطوانى فإن إحداثيات

نقطة هذا السطح تحقق إذن المعادلة

$$3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 2xz + 8yz - 3 = 0$$

مثال (٢): أوجد معادلة الإسطوانة اللانربية القائمة التي تضاف قطرها d ومحورها المثل

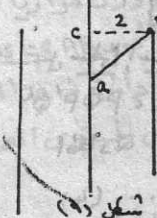
المحور للإسطوانة

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

الحل: لاحظ أن دليل هذا السطح الإسطوانى دائرة تقع في مستوى عمودي على الاتجاه $d = \langle 2, 1, 2 \rangle$

نفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ نقطة على سطح الإسطوانة. لنقطة

$a(1, 2, 3)$ تقع على محور الإسطوانة:



$$\underline{ap} = \underline{p} - \underline{a} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$= \langle x_1 - 1, y_1 - 2, z_1 - 3 \rangle$$

من معادلة محور الإسطوانة نجد أن موجهه هو d . إذن مركبة ap في اتجاه d

$$\frac{ap \cdot d}{|d|} = \frac{\langle x_1 - 1, y_1 - 2, z_1 - 3 \rangle \cdot \langle 2, 1, 2 \rangle}{3} = ac$$

من شكل (٩) ينتج أن

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 + (z_1 - 3)^2 = 4 + \left[\frac{2}{3}(x_1 - 1) + \frac{1}{3}(y_1 - 2) + \frac{2}{3}(z_1 - 3) \right]^2$$

$$x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4 + z_1^2 - 6z_1 + 9 = 4 + \frac{(2x_1 + y_1 + 2z_1 - 10)^2}{9}$$

$$5x_1^2 + 8y_1^2 + 5z_1^2 - 4x_1y_1 - 4y_1z_1 - 8x_1z_1 + 33x_1 - 16y_1 - 14z_1 - 10 = 0$$

وهي أن النقطة P أي نقطة على السطح الإسطوانى المطلوب فإنه ينتج أن إحداثيات

نقطة السطح الإسطوانى تحقق المعادلة

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 8xz + 33x - 16y - 14z - 10 = 0$$

مثال (٤): أوجد معادلة السطوانة القائمة التي دليلها $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x + y + z = 0$, الخ: لاحظ أن π هو المستوى $x + y + z = 0$, Δ هو منحنى تقاطع السطح $x^2 + y^2 - 2z = 0$ بالمستوى π . المنحى Δ هو المحيطة العمودي على المستوى π .

بما أن السطوانة قائمة، فإن المنحى Δ يكمن موجعا لرؤس السطوانة. بالتالي فإن معادلة الراس المار بالنقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ على السطح Δ تكون

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{1} \quad \text{أي}$$

$$x = x_1 + \lambda, \quad y = y_1 + \lambda, \quad z = z_1 + \lambda \quad \dots (1)$$

نقطة تقاطع هذا الراس مع المستوى π نحصل عليها بالتعويض في معادلة π :

$$x_1 + \lambda + y_1 + \lambda + z_1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}(x_1 + y_1 + z_1) \quad \dots (2)$$

نقطة التقاطع هذه تحقق معادلة السطح $x^2 + y^2 - 2z = 0$ أيضا. بالتعويض من (1) في معادلة السطح نحصل على

$$(x_1 + \lambda)^2 - (y_1 + \lambda)^2 - 2(z_1 + \lambda) = 0 \quad \dots (3)$$

بالتعويض من (2) في (3) نجد أن

$$\left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}z_1\right)^2 - \left(\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}z_1\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_1\right) = 0$$

$$\text{أي} \Rightarrow (2x_1 - y_1 - z_1)^2 - (2y_1 - x_1 - z_1)^2 - 6(2z_1 - x_1 - y_1) = 0$$

$$5x_1^2 + 5y_1^2 + 2z_1^2 - 8x_1y_1 - 6x_1z_1 - 2y_1z_1 + 6x_1 + 6y_1 - 6z_1 = 0$$

وهي أن النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ نقطة اختيارية على السطح Δ المطلوب. فإن إحداثيات السطح Δ تحقق المعادلة:

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 6xz - 2yz + 6x + 6y - 6z = 0$$

مثال (٥): أوجد معادلة السطوانة المعلقة للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

والتي تتوازي رؤسها الخط المستقيم $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ الخ: نفرض أنه $P(x_1, y_1, z_1)$ نقطة على سطح السطوانة. إذن معادلة الراس المار بها هي:

$$x = x_1 + \lambda l, \quad y = y_1 + \lambda m, \quad z = z_1 + \lambda n$$

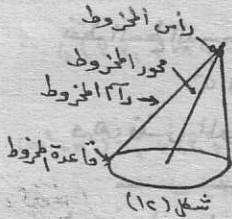
وبالتعويض في معادلة الكرة نحصل على:

$$(x_1 + \lambda l)^2 + (y_1 + \lambda m)^2 + (z_1 + \lambda n)^2 = a^2 \Rightarrow$$

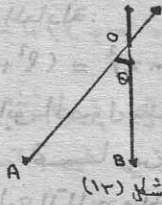
$$(l^2 + m^2 + n^2)\lambda^2 + 2(lx_1 + my_1 + nz_1)\lambda + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2) = 0$$

فإذا ما الراس P تكون نقطتي التقاطع منطقتين، وهنّ المعادلتان متساويتان،

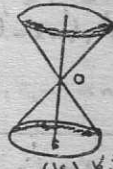
مولدات السطح المخروطي، والمخروطي يسمى دليل السطح المخروطي والنقطة الثابتة O تسمى رأس السطح المخروطي.



شكل (١١)



شك (١٢)



شك (١٣)

إذا قطع مستوى موازي للمستوى Π وليس مارا بالرأس O السطح المخروطي فإن هذا المقطع يكون مغني مشابه للمغني Δ . هذا المغني يسمى قاعدة المخروط. أم رأس المخروط في هذا المستوى. إذا كان المغني Δ دائرة سمى السطح المخروطي مخروطا دائريا والمستقيم الواصل بين رأس المخروط ومركز الدائرة يسمى محور المخروط (شكل (١٤)).

وإذا كان المحور عموديا على المستوى Π سمى المخروط دائريا قائما.

ويمكن تصور تولد المخروط الدائري القائم الذي رأسه النقطة O من دوران خط مستقيم AO حول خط مستقيم BO يصنع زاوية θ مع الخط المستقيم AO (شكل (١٢)) ليولد المخروط الموضح بالمثل (١٤). الزاوية θ تسمى نصف زاوية رأس المخروط. لاحظ أن BO هو محور المخروط.

ويجب ملاحظة أن مقطع المخروط الدائري القائم بمثل θ يكون بصفة عامة قطعاً مخروطياً (إذا كان المستوى عمودياً (مائلاً) على المحور كما المقطع دائرة (قطع ناقص)) فتد السطح الذي معادلته

$$x^2/4 + y^2/4 - z^2/9 = 0$$

مخروط دائري قائم وزاوية رأسه 60° .

١- مقطعه بالمستوى $z=0$ هو النقطة $(0,0,0)$ فقط (رأس المخروط)

٢- مقطعه بأي مستوى موازي للمستوى xy (أي $z=k$) يكون الدائرة:

$$x^2 + y^2 = 4k^2/9, \quad z = k$$

التي يزداد نصف قطرها كلما ابتعدنا عن الرأس.

٣- أي مقطع متوازي له يكون بصفة عامة قطعاً مخروطياً.

$$y = \pm \frac{2z}{3}$$

٤- المقطع بالمستوى $x=0$ يكون خطاً مستقيماً

$$x = \pm \frac{2z}{3}$$

٥- أما السطح الذي معادلته $x^2/4 - y^2/4 + z^2/9 = 0$ فإن:

١- مقاطع المستويات الخوازيه للمستوى $y=0$ (أى المستوى $k=y$) تكون قطعاً ناقصاً :

$$x^2/4 + z^2/9 = k^2, y = k$$

٢- مقطع المستوى $y=0$ هو النقطة $(0,0,0)$

أى أنه هذا القطع يكون سطحاً مخروطياً دليله قطع ناقص ورأسه نقطة النصل وليس هذا القطع بالمخروط الناقص .

مثال (٦) : أوجد معادلة المخروط الذى رأسه نقطة النصل ودليله هو المخطئ

$$5x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1; 3x - 2y + 2z = 1$$

الحل : من هذا المثال π هو المستوى $3x - 2y + 2z = 1$ والدليل هو المخطئ

$$5x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1; 3x - 2y + 2z = 1$$

جاء أن رأس المخروط نقطة النصل ، فإن معادلة أى رأس للمخروط تكون :

$$r = \lambda d = \lambda \langle a, b, c \rangle$$

$$x = \lambda a; y = \lambda b; z = \lambda c \quad \dots (1)$$

كل رأس من هذه الرؤوس يقطع المخطئ ، أى يقطع القطع أى $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1$ والمستوى π فى نفس النقطة . بالتعويض فى معادلة القطع ينتج أن :

$$5\lambda^2 a^2 + 3\lambda^2 b^2 + 2\lambda^2 c^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{5a^2 + 3b^2 + 2c^2} \dots (2)$$

وبالتعويض فى معادلة المستوى π نجد أن

$$3\lambda a - 2\lambda b + 2\lambda c = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3a - 2b + 2c} \dots (3)$$

حيث أن λ فى (٢) هى نفس λ فى (٣) فإنه ينتج أن

$$(3a - 2b + 2c)^2 = 5a^2 + 3b^2 + 2c^2 \Rightarrow 4a^2 + b^2 + 2c^2 - 12ab + 12ac - 8bc = 0$$

بالتعويض من (١) فى هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$4x^2 + y^2 + 2z^2 - 12xy + 12xz - 8yz = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

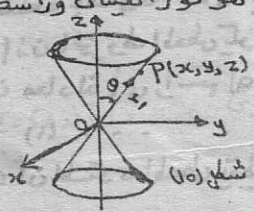
وهى معادلة القطع المخروطى المطلوب .

مثال (٧) : أوجد معادلة المخروط الدائرى القائم الذى محوره هو محور العينات ورأسه نقطة النصل ونصف زاوية رأسه θ .

الحل : رؤوس هذا المخروط متقيّات مارة بنقطة النصل

وتتصّع زاوية θ مع محور العينات .

نفرض أن P نقطة على سطح المخروط ، θ هى الزاوية



-78-

بين المتجهين $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ و $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$.
 $\therefore \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{k}}{|\vec{r}| |\vec{k}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = 0$
 وهي معادلة المخروط الرأسي القائم المطلوب.

مثال (٨): أوجد معادلة المخروط الذي رأسه $(-1, 2, 1)$ ودليله الممتني.

$$3x^2 + 2y^2 = 6; \quad z = 0$$

الحل: في هذا المثال π هو المستوى $z = 0$ هو الممتني δ هو الممتني
 معادلة أي رأس للمخروط المطلوب هي:

$$x = -1 + \lambda a; \quad y = 2 + \lambda b; \quad z = -1 + \lambda c \quad \dots (1)$$

لكل رأس من هذه الرؤوس يقطع الممتني δ في نقطة، أي يقطع المخ $3x^2 + 2y^2 = 6$
 والمستوى π في نفس النقطة. عنده $z = 0$ فإن $\lambda = \frac{1}{c}$. وبالتالي فإن:

$$x = -1 + a/c; \quad y = 2 + b/c \quad \dots (2)$$

بالتعويض من (2) في معادلة المخ يحصل على:

$$3(-1 + a/c)^2 + 2(2 + b/c)^2 = 6 \Rightarrow 3a^2 + 2b^2 + 5c^2 + 6ac + 8bc = 0$$

بالتعويض من (1) في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$3(x+1)^2 + 2(y-2)^2 + 5(z+1)^2 + 6(x+1)(z+1) + 8(y-2)(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 6xz + 8yz - 12z - 6 = 0$$

وهي معادلة سطح المخروط.

مثال (٩): أوجد معادلتَي المتيقين اللذين يقطع فيها المستوى $2x + y - z = 0$

$$4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0 \quad \text{المخروط}$$

الحل: من معادلة المخروط $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ يتضح لنا أن:

١- مقطعه بأي مستوى موازي للمستوى $y = 0$ (أي $y = k$) يكون دائرة مقلبة
 ناقصا، $4x^2 + 3z^2 = k^2; \quad y = k$

٢- مقطعه بالمستوى $y = 0$ يكون النقطة $(0, 0, 0)$

إذن المخروط المعطى يكون مخروطاً ناقصاً رأسه نقطة الأصل.

إذن معادلة أي رأس له هي

$$x = \lambda a; \quad y = \lambda b; \quad z = \lambda c \quad \dots (1)$$

حيث أن المستوى المعطى يقطع المخروط في متقيمين، فإن كلا من هذين المتقيمين

يكون رأسا للخط المخروطي المعطى. أي أن أصلايات نقط هذين الراسين تحقق معادلة مستوى المعطى. بالتعويض من (١) في معادلة المستوى المعطى:

$$2\lambda a + \lambda b - \lambda c = 0 \Rightarrow 2a + b - c = 0 ; \lambda \neq 0 \dots (2)$$

ومنه أن هذه النقط تقع على المخروط كذلك فبالتعويض من (١) في معادلة المخروط:

$$4\lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2 + 3\lambda^2 c^2 = 0 \Rightarrow 4a^2 - b^2 + 3c^2 = 0 ; \lambda \neq 0 \dots (3)$$

$$c = 2a + b \dots (4) \text{ من (2):}$$

فبالتعويض من (٤) في (٣) نحصل على:

$$8a^2 + 6ab + b^2 = 0 \Rightarrow (4a + b)(2a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$b = -4a$$

$$b = -2a$$

$$\therefore b:a = 1:-4$$

$$\therefore b:a = 1:-2$$

$$c = 2a - 4a = -2a \text{ (٤) بالتعويض}$$

$$c = 2a - 2a = 0 \text{ (٤) بالتعويض}$$

$$\therefore a:c = 1:-2$$

$$\therefore a:b:c = 1:-2:0$$

$$a:b:c = 1:-4:-2 \text{ وبالمثل فإن:}$$

وبالتالي فإنه معادلة الرأس

معادلة الرأس الأول هي:

الثاني هي:

$$x/1 = y/-4 = z/-2$$

$$x/1 = y/-2 = z/0$$

أرئى (٥)

١- ارسم كل من السطح المخروطية المعطاه في كل رسم وضع الدلائل في مستويات الدلائل

المقاطع مع محاور البعد، وعلى الدقل مقطعين متوازيين عموديين على محور الطول المخروطي

$$(i) y^2 - z^2 = x^2 \text{ ; (ii) } x^2 - z^2 = y^2 \text{ ; (iii) } x^2/4 - y^2/25 + z^2/4 = 0$$

$$(iv) x^2/9 - y^2/16 - z^2/16 = 0 \text{ , (v) } 4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0 \text{ ; (vi) } 16x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 0$$

٢- أوجد معادلة المخروط الدائري القائم الذي رأسه النقطة (٥, ٥, ٥) ومحوره المستقيم

$$x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ ونب اتجاهه أحدها } 1:1:1$$

٣- أثبت أن المستوى $(1, 1, 1) \cdot x = 0$ يقطع المخروط $3yz + 3zx - 5xy = 0$ في

رأسين متعامدين

٤- أثبت أن الزاوية المحصورة بين رأسى المخروط

$$6yz - 2zx + 5xy = 0 \text{ الواقعين في المستوى } (5, 3, 3) \cdot x = 0$$

هي $\cos^{-1}(1/6)$

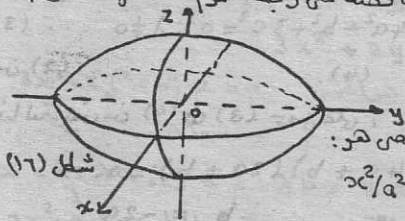
(٥-٦) : الجسم الناقص "The Ellipsoid"

معادلة الجسم الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

وله الخواص التالية :

- ١- جميع مقاطع الجسم الناقص تكون قطعاً ناقصاً على وجه العموم ، ومنه المقاطع الجوانبية لمستويات الإسناد ، فمثلاً ، المقطع



الناتج عن قطع المستوى $z=k$

(مستوى موازي المستوى $z=0$ للسطح الناقص هو :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \quad \text{د} \quad z=k \quad (2)$$

المعادلة (2) تمثل قطع ناقص فيه

$$A = a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}} \quad \text{د} \quad B = b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}} \quad : \quad |k| < c$$

حيث A, B هما أيضاً محوريه الأكبر والأصغر على الترتيب . هذا القطع الناقص يكون متماثلاً بالنسبة إلى المستويات $x=0$ و $y=0$. القيم A و B تكون أكبر ما يمكن عندما $k=0$ (في هذه الحالة $A=a, B=b$) . أي أن أكبر القطوع الناقصة هي التي تحصل عليها من قطع المستوى $z=0$ للجسم الناقص (شكل (١٦)) .

عندما تتزايد القيمة $|k|$ فإن القيم A, B تناقص . وعندما $k=\pm c$ فإن $A=B=0$ أي أن القطع الناقص الناتج عن تقاطع السطح الناقص (١) بالمستوى $z=c$ أو بالمستوى $z=-c$ يتلاصق إلى نقطة . وبلفه أخرى نقول أن

المستويات $z=\pm c$ هي مستويات التماس للسطح الناقص (١) .
عندما $|k| > c$ فالمعادلة (٢) تمثل قطع ناقص تخيلي وهذا يعني أنه عندما $|k| > c$ فالمستوى $z=k$ لا يتقابل مع السطح الناقص المعطى على وجه العموم .

٢- السطح الناقص يقع داخل متوازي المستطيلات $z=\pm c$ و $y=\pm b$ و $x=\pm a$.

٣- السطح متماثل بالنسبة لمستويات الإسناد ويكون متوازياً مع ٨ أثمان متطابقة

٤- يقطع المحاور z, y, x الجسم الناقص في النقاط

$(\pm a, 0, 0)$ و $(0, \pm b, 0)$ و $(0, 0, \pm c)$ على الترتيب .

هذه النقاط الست تسمى رؤوس الجسم الناقص (١) .

مثال (١) : تحقق من أن المعادلة $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ تمثل سطحاً ناقصاً فافيد

-VI-

رؤوسه. كذلك أوجد معادلة المقطع الناتج عن تقاطع هذا الطح مع مستوى $y = -2$.

الحل: المعادلة $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ يمكن كتابتها على الصورة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$ ومن الواضح أنها تمثل مجسم ناقص فيه: $a = 6, b = 2\sqrt{3}, c = 3$ ورؤوسه هي:

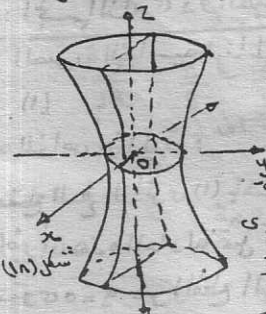
$(\pm 6, 0, 0); (0, \pm 2\sqrt{3}, 0); (0, 0, \pm 3)$
معادلة المقطع هي: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1; y = -2$

أو $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = \frac{2}{3}; y = -2 \Rightarrow \frac{x^2}{24} + \frac{z^2}{6} = 1; y = -2$
وواضح أن المقطع يمثل قطع ناقص مماس للمحور oy ومركزه $A = 2\sqrt{6}, B = \sqrt{6}$ ومركزه $(0, -2, 0)$ وهي نقطة على المحور oy .

(٥-٧): المجسم الزائدي "The Hyperboloid"

يوجد نوعان من المجسمات الزائدية

١- المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة: "Hyberboloid of One Sheet"
الصورة القياسية لهذا المجسم هي:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

وله الخواص التالية:

١- تماثل بالنسبة لمستويات الدند وتكون مسامات متناظرة.

٢- مقطع الطح الزائدي (١) بمستوى يوازي مستوى $y = 0$ (المستوى xy)

$y = k$ (مستد) هو المحنز: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$ و $y = k$
وواضح أن هذه المعادلة تمثل قطع زائد. وعلى سبيل الخصوص

المقطع بالمستوى $y = 0$ يكون المقطع الزائد: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و $y = 0$

المتماثل بالنسبة للمحور oz وقاطعا للمحور ox في النقطتين $(\pm a, 0, 0)$.

٣- مقطع الطح الزائدي (١) بمستوى موازي للمستوى $x = 0$ (المستوى yz) هو المحنز $x = k$ و $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$

وواضح أن هذه المعادلة تمثل قطع زائد. وعلى سبيل الخصوص المقطع بالمستوى $x = 0$

يكون المقطع الزائد $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و $x = 0$

المتماثل بالنسبة للمحور oz وقاطعا للمحور oy في النقطتين $(0, \pm b, 0)$

٤- مقطع الطح الزائدي (١) بالمستوى $z = k$ هو المحنز:

-٧٥-

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 + k^2/c^2 \quad ; \quad z = k$$

روافق أن هذه المعادلة تمثل قطع ناقص .
 $A = a\sqrt{1+k^2/c^2}$ و $B = b\sqrt{1+k^2/c^2}$ هما نصفاه محوريه الأكبر والأصغر على الترتيب . القيم A, B تكون أصغر ما يمكن عند ما $k=0$ (في هذه الحالة تكون $A=a, B=b$) أي أن أصغر القطوع الناقصة تحصل على $z=0$ المستوى للسطح الزائدي (١) (شكل ١١٨) . عندما تتزايد القيمة $|k|$ فإن القيم A و B تتزايد أيضا .

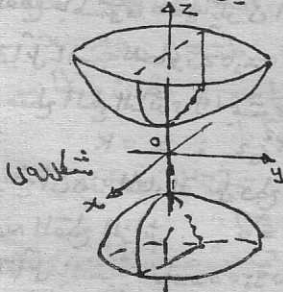
٥- يقطع محاور السينات الجسم الزائدي (١) في النقطتين $(\pm a, 0, 0)$ ، ويقطع محاور الصادات السطح الزائدي (١) في النقطتين $(0, \pm b, 0)$. أما محور العينات فلا يقطع الجسم الزائدي (١)
 مثال (١١) : عين نوع السطح $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0$

الحل : يمكن كتابته معادلة هذا السطح على الصورة
 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$
 وهي تمثل الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة الذي مركزه النقطه $(0, 0, 0)$ ومحور دورانه هو المحور x (لأنه ينشأ من دورانه القطع الزائدي حول محوره لملاقق) وذلك لأن لمعامل السالب هو معامل x^2 . ونصف الدائرة عند العنق يابو "2" . أما نصف محوره بطول $= 4$.
 (ب) : الجسم الزائدي ذو الطيتين : "Hyperboloid of two Sheets"
 الصورة القياسية لهذا السطح هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (1)$$

وله الخواص التالية :

١- مقطع السطح الزائدي (١) بالمستوى $y = k$ هو لمنحنى $y = k$ و $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{k^2}{b^2}$ و واضح أن هذه المعادلة تمثل قطع زائد . وعلى سبيل الخصوص مقطع السطح الزائدي بالمستوى $y = 0$ هو القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و $y = 0$ و $z = 0$ وقاطعا للمحور z في النقطتين $(0, 0, \pm c)$ المتماثل بالنسبة للمحاور ox, oz و oy, oz هو المنحنى $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{k^2}{a^2}$ و $x = k$



و واضح أن هذه المعادلة تمثل قطع زائد ، وعلى سبيل الخصوص مقطع السطح الزائدي (١) بالمستوى $x = 0$ هو القطع الزائد $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ و $x = 0$

المقابل بالنسبة للمحاور oz و oy وقاطعا للمحور oz في النقطتين $(0,0,\pm c)$

٣- مقطع الطح الزائدي (١) بالمستوى $z=k$ هو المثلث $z=k$ و $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2}$ وواضح أن: عندما $|k| > c$ فإن المقطع في هذه الحالة هو القطع الناقص

حيث $z=k$ ، $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ، $A = a\sqrt{\frac{k^2}{c^2}-1}$ ، $B = b\sqrt{\frac{k^2}{c^2}-1}$ هما نصفاه محوريه الأكبر والأصغر على الترتيب . عندما $|k|$ تتزايد ، فإن القيم A, B تتزايد أيضا . وعندما $|k|$ تناقص إلى أن تتولد إلى القيمة c ، فإن A, B تناقص أيضا وتتولد إلى الصفر (إذا كانت $k = \pm c$ فإن $A=B=0$ وهذا يعني أن القطع الناقص الناشئ عن تقاطع المستوى $z = \pm c$ مع الطح الزائدي (١) يتلاشى إلى نقطة ، أو بلغة أخرى ، المستويان $z = \pm c$ تكون مستويان مماس للطح (١) عندما $|k| < c$ ، فإن المقطع في هذه الحالة هو قطع ناقص تيملي . وهذا يعني أنه

عندما $|k| < c$ فالمستوى $z = \pm c$ لا يتقابل مع الطح (١) على وجه العموم . مثال (١٢) : أوجد المقطع الناتج عن تقاطع المستوى $x=2$ بالطح الزائدي .

$$2x^2 - 4y^2 + z^2 + 36 = 0 \quad \dots (1)$$

الحل : المعادلة (١) تأخذ الصورة $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = -1$ وهي معادلة مجسم زائدي ذو طيتين . إذن معادلة المقطع هي

$$\frac{y^2}{11} - \frac{z^2}{44} = 1 \quad \text{و } x = (2)$$

ومن الواضح أن المقطع هو قطع زائدي مركزه $(2,0,0)$.

(٥-٨) : الطح المخافئ :

يوجد نوعان من المخيمات (الطوح) المخافئيه

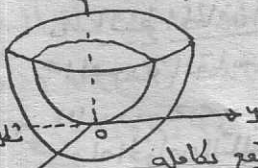
١- الطح المخافئ الناقص : "The parabolic Ellipsoid"

الصورة القياسية لهذا الجسم هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \dots (1)$$

وله الخواص التاليه :

- ١- هذا الطح يمر بالمستوى $z=0$ عند نقطة الأصل ، ويقع بكامله فوق المستوى $z=0$. إذا كانت $c > 0$ ، ويقع بكامله تحت المستوى $z=0$ إذا كانت $c < 0$.
- ٢- الطح (١) متماثل بالنسبة للمستويين $x=0, y=0$ ويكون مركزا من ٤ أرباع متطابقة .



٣- مقطع الطح (١) بالمستوى $y = k$ هو المنحنى: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = cz$; $y = k$
وهو قطع مكافئ. وعلى سبيل الخصوص مقطع هذا الطح بالمستوى $y = 0$ هو القطع
المكافئ $\{x^2 = a^2 cz \text{ و } y = 0\}$ الذي رأسه نقطة الأصل مفتوحا إلى أعلى أو
إلى أسفل حسبما كانت $c > 0$ و $c < 0$. وقمائل بالنسبة للمحور oz .
٤- مقطع الطح (١) بمستوى موازى للمستوى $x = 0$ (المستوى $x = k$ مثلا) هو المنحنى

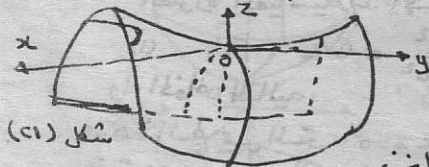
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} = cz \text{ ; } x = k$$

وهو قطع مكافئ. وعلى سبيل الخصوص مقطع هذا الطح بالمستوى $x = 0$ هو لقطع
المكافئ $\{y^2 = b^2 cz \text{ و } x = 0\}$ الذي رأسه نقطة الأصل، مفتوحا إلى أعلى أو إلى أسفل
حسبما كانت $c > 0$ و $c < 0$ ، وقمائل بالنسبة للمحور oz .
٥- مقطع الطح (١) بالمستوى $z = k$ هو المنحنى

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ck \text{ ; } z = k$$

وواقع أنه: عندما $k > 0$ لها نفس الإشارة فإن المقطع في هذه الحالة يكون
القطع الناقص $z = k$; $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ حيث $A = \sqrt{c}a$, $B = \sqrt{c}b$;
هنا نصف محوريه الذبر والذصر على الترتيب. هذا المقطع الناقص يكون قمائل
بالنسبة للمستويات $y = 0$ و $x = 0$. عندما $k = 0$ فإن $A = B = 0$. وهذا يعني أن
القطع الناقص الناشئ عن تقاطع المستوى $z = k$ بالطح (١) يتلصق إلى نقطة. وبلغه
أخرى، فالمستوى $z = 0$ ممس الطوح (١) عند نقطة الأصل. عندما يكون $k < 0$
لها إشارتين مختلفتين فإن المقطع في هذه الحالة يكون قطع ناقص تيجلي. وهذا
يعني أنه في هذه الحالة لا يتقاطعا بالمستوى $z = k$ مع الطح (١) على وجه العموم.
إذا كان $a^2 = b^2$ فإن المقطع في هذه الحالة هو دائرة مركزها يقع على المحور
 oz . وبالتالي، إذا كانت $a^2 = b^2$ فإن الطح (١) يعرف بالطح الناشئ من دوران القطع
المكافئ حول محوره. يقطع كل من محاور البسناد الطح (١) في نقطة إنصل فقط.

ب- الطح المكافئ الزائري "The parabolic Hyperboloid"



شكل (٤١)

الصورة القياسية لهذا الطح هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \dots (1)$$

وله الخاصات التالية:

١- مقطع الطح (١) بالمستوى $y = k$ هو المنحنى $\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = cz$; $y = k$

وواقع أن هذه المعادلة تمثل قطع مكافئ. وعلى سبيل القصور من مقطع هذا القطع بالمستوى $y=0$ يكون قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل مفتوحاً إلى أعلى (أو أسفل) حسبما كانت $c > 0$ ($c < 0$) وقمائل بالنسبة للمحور oz .

جـ- مقطع القطع (١) بالمستوى $z=k$ هو الخفي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck$ و $z=k$ واقع أن هذه المعادلة تمثل قطع زائد قماثل بالنسبة إلى المستويات $x=0$; $y=0$ عندما يكون c, k لهما نفس الإشارة، فإن المقطوع الزائدي المناظرة تتقاطع مع المستوى $y=0$ عندما $k=0$ فالقطع الزائد المناظر يؤول إلى زوج من المستقيمتين (شكلاً ١١) يوضع مقطع القطع (١) لواحد من المستويات $z=k$ (في الحالة $c > 0$).

مثال (١٣): أوجد معادلة القطع المكافئ الزائدي المار بالنقطتين $P_1(8, 3, \frac{3}{2})$ و $P_2(-4, 3\sqrt{3}, -1)$ إذا علم أن مقطع هذا القطع بالمستوى $x=0$ هو القطع المكافئ $y^2 = -3z$ و $x=0$

الحل: الصورة القياسية للقطع المكافئ الزائدي هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ بما أن P_1 و P_2 نقط واقع على القطع، إذن فهي تحقق معادلته:

$$\frac{64}{a^2} - \frac{9}{b^2} = \frac{3}{2}c \quad \text{و} \quad \frac{16}{a^2} - \frac{27}{b^2} = -c \Rightarrow a^2 = \frac{32}{c} \quad \text{و} \quad b^2 = \frac{18}{c}$$

∴ معادلة القطع المكافئ الزائدي هي: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$ مثال (١٤): إذا كان الخط المستقيم المار بالنقطة $P_1(1, 1, 1)$ في اتجاه لتيجه $\langle 1, 1, -1 \rangle$ يدرج القطع المكافئ الناقص $x^2 + y^2 = 2z$ مرة ثانية في نقطة P_2 . أوجد طول PP_2 واصلايات لنقطة P_2 .

الحل: معادلة الخط المستقيم هي $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

أي $x=1+\lambda$; $y=1+\lambda$; $z=1-\lambda$ بالتعويض في معادلة القطع يتبع أن: $(1+\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ أو -3 عندما $\lambda = -3$ ، فإن نقطة التقاطع الثانية هي $P_2(-2, -2, 4)$

$$\therefore PP_2 = \|\langle -3, -3, 3 \rangle\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

(٩-٥): السطوح المطرقة: "Rule Surfaces"

السطح المطر هو سطح يمر بكل نقطة من نقط مستقيم يقع بأطرافه على السطح ويسمى هذا المستقيم رأساً "Generator" كما يقال أن هذا السطح يتولد من خطوط مستقيمة.

٢- رواسم الطغ الزائدي ذوالطية الواحدة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

صورة هذا الطغ القياسي هي :

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) ; \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

وعلى ذلك فإن معادلات المجموعة الأولى من رواسم هذا الطغ هي:

$$\text{و معادلات المجموعة الثانية هي:}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu \left(1 - \frac{y}{b}\right) ; \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

ب- رواسم الطغ المكافئ الزائدي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

معادلة هذا الطغ هي :

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz$$

يمكن كتابتها على الصورة :

ومننا نجد أن معادلات مجموعتي الرواسم هي :

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c\lambda z$$

$$; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c\mu z$$

$$; \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}$$

حيث لكل من λ, μ بارامتر.

$$\text{مثال (١٥):} \text{ أوجد معادلات رواسم السطح المكافئ الزائدي } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z$$

الحل: معادلات مجموعة الرواسم هي:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = \lambda z ; \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = \mu z ; \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\mu}$$

حيث لكل من λ, μ بارامتر.

مثال (١٦): أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم

$$r = \langle 1, -5, -1 \rangle + k \langle -2, 1, 3 \rangle$$

مع الطغ $x^2 + y^2 - z^2 = 25$. أوجد معادلات رواسم الطغ

عند نقطة التقاطع .

الحل: نكتب معادلة المستقيم في صورته البارامترية :

$$x = 1 + 2k ; y = -5 + k ; z = -1 + k$$

بالتعويض في معادلة الطغ نحصل على :

$$k^2 - k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ or } k = 1$$

عندما $k=1$:

$$(1+2(1), 1-5, 1-1) = (3, -4, 0)$$

نقطة التقاطع الثاني

عندما $k=0$:

$$(1+2(0), 0-5, 0-1)$$

$$= (1, -5, -1)$$

نقطة التقاطع الأول

يمكن كتابة معادلة الطح على الصورة

$$(x-z)(x+z) = (5-y)(5+y)$$

فتكون معادلت مجموعتي الرواسم لهذا الطح هي:

$$x-z = \lambda(5-y) \quad ; \quad (x+z) = \frac{1}{\lambda}(5+y) \quad \dots (1)$$

$$x+z = \mu(5-y) \quad ; \quad (x-z) = \frac{1}{\mu}(5+y) \quad \dots (2)$$

بالقريظ من المعادلة الأولى لكل من المجموعتي (1), (2) بالنقطة (1, -5, -1)

$$\lambda = 1/5, \quad \mu = 0$$

تصل على:

وعلى ذلك فإنه معادلت مجموعتي الرواسم للطح عند النقطة (1, -5, -1) هي:

$$x-z = \frac{1}{5}(5-y) \quad ; \quad (x+z) = 5(5+y)$$

$$x+z = 0 \quad ; \quad y = -5$$

وبالمثل بالقريظ من المعادلة الأولى لكل من المجموعتي (1), (2) بالنقطة

$$\lambda = \mu = \frac{1}{3}$$

(3, 4, 0) نحصل على

فتكون معادلت مجموعتي الرواسم لهذا الطح عند النقطة (3, 4, 0) هي

$$x-z = \frac{1}{3}(5-y) \quad ; \quad x+z = 3(5+y)$$

$$x+z = \frac{1}{3}(5-y) \quad ; \quad x-z = 3(5+y)$$

تمارين (٣)

١- تحقق من أن المعادلة $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 24 = 0$ تمثل سطح ناقص ثم أوجد

رؤوسه. كذلك أوجد معادلة المقطع الناتج من تقاطع هذا الطح مع

المستوى $z=2$

٢- أوجد معادلة المقطع الناتج من تقاطع الطح الناقص

$$16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 48 = 0$$

بالمستويات (أ) $x=3$ ، (ب) $y=4$ ، (ج) $z=\sqrt{3}$

-٧٨-

٣- تحقق من أن المعادلة

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 36z - 99 = 0$$

تمثل سطح ناقص . أوجد مركزه مركزه

٤- أوجد معادلة المقطع الناتج من تقاطع السطح الزائدي

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

بالمستوى $z=2$

٥- تحقق من أن المعادلة $3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0$ تمثل سطح زائدي
ذو طيبيته . ثم أوجد معادلة المقطع الناتج من تقاطع هذا السطح بالمستوى $y=3$

٦- إذا كان الخط المستقيم المار بالنقطة $P_1(1,1,1)$ في اتجاه المتجه $\langle 1,1,1 \rangle$
يلتقي السطح الناقص $x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$ في نقطتين أخري P_2 . أوجد P_1P_2

٧- أوجد معادلات الرواسم للسطح الزائدي

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

الذي يمر بالنقطة $(2, -1, 4/3)$ و $(-4, 3, 2)$

٨- أوجد معادلات الرواسم للسطح الزائدي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

التي تمر بالنقطة $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$

٩- أوجد معادلات الرواسم للسطح المخالف

$$(x+y+z)(2x+y-z) = 6x$$

التي تمر بالنقطة $(1,1,1)$



(٥-١): تقاطع خط متقيم مع سطح ثنائي :

لقد أشرنا لهذا في البند (٣-٥) والدن سنأرس هذا الهود بالتفصيل بهذا البند .

يمكن صياغة المعادلة (3) بالبند (٣-٥) على الصورة :

$$\lambda^2 F(\hat{b}) + \lambda \hat{b} \cdot \nabla F(a) + F(a) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\nabla F(a) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} ; \frac{\partial F(x)}{\partial y} ; \frac{\partial F(x)}{\partial z} \right)_a \quad \text{حيث}$$

المعادلة (١) من الدرجة الثانية في λ فيكون لها جذران على الخوائالى :
 (١) حقيقتان مختلفان أو (٢) حقيقتان متساويان أو (٣) تخيليان .
 ففي الحالة (١) نقول أن الخط المتقيم يقابل السطح في نقطتين حقيقتين ومختلفتين ويمكن الحصول عليهما من معادلة الخط المتقيم بالتعويض عن قيمتا λ التي حصلنا عليها من (١)

أما الحالة (٢) فوجد أن الخط المتقيم يمس السطح في نقطة يمكن إيجاد إحداثياتها كما في الحالة (١) ويصبح الخط المتقيم ماسا للسطح .
 أما الحالة (٣) فإن الخط المتقيم لا يقابل السطح الثنائي .

مثال (١) : أوجد نقط تقاطع الخط المتقيم المار بالنقطة (3, -1, 2)

$$\text{ويوازي المجه } K + 2Z - 2 \text{ مع السطح الثنائي } 3x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1$$

الحل : نوجد معادلة الخط المتقيم في تمثيله البارامترى :

$$x = 2 + \lambda ; y = -1 - 2\lambda ; z = 3 + \lambda \quad \dots (1)$$

عوض من (١) في معادلة السطح الثنائي المعطى ينتج أن :

$$\Rightarrow 3(2 + \lambda)^2 + 2(-1 - 2\lambda)^2 - 4(3 + \lambda)^2 = 1$$

$$7\lambda^2 - 4\lambda - 23 = 0 \quad \dots (2)$$

جذرا المعادلة (2) هما $\lambda_1 \approx -1.5 ; \lambda_2 \approx 2.1$

أي أن المتقيم (1) يعاين الخ في تعطين وهما

$$\lambda_1 \equiv -1.5 : \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right) \text{ و } \lambda_2 \equiv 2.1 : (4, -1, -5, 2, 5, -1)$$

طريقة أخرى:

نوجد معادلة الخط المتقيم ممثله بالصورة الموجبة:

$$\underline{r} = (2, -1, 3) + \lambda \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} \quad \dots (3)$$

ضع

$$F(\underline{r}) = 3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \nabla F(\underline{a}) = (6x, 4y, -8z) = (12, -4, -24) \quad \underline{a} = (2, -1, 3)$$

وأن $\hat{\underline{b}} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}}$ بالتعويض في المعادلة:

$$\lambda^2 F(\hat{\underline{b}}) + \lambda \hat{\underline{b}} \cdot \nabla F(\underline{a}) + F(\underline{a}) = 0$$

نحصل على المعادلة:

$$7\lambda^2 - 4\lambda - 23 = 0 \quad \dots (4)$$

واضح أن المعادلة (4) هي نفس المعادلة (2) وهذا تشكل الحل.

مثال (9): أوجد نقط تقاطع المتقيم اطار بالنقطتين $P_1(4, -5, -2)$

و $P_2(-1, 5, 3)$ مع الخ السائي $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$

الحل: نوجد معادلة الخط المتقيم ممثله في صورته الموجبة:

$$\begin{aligned} \underline{r} &= (4, -5, -2) + \lambda (\underline{P}_2 - \underline{P}_1) \\ &= (4, -5, -2) + \lambda (-5, 10, 5) \\ &= (4, -5, -2) + \lambda' \left(\frac{-1, 2, 1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة:

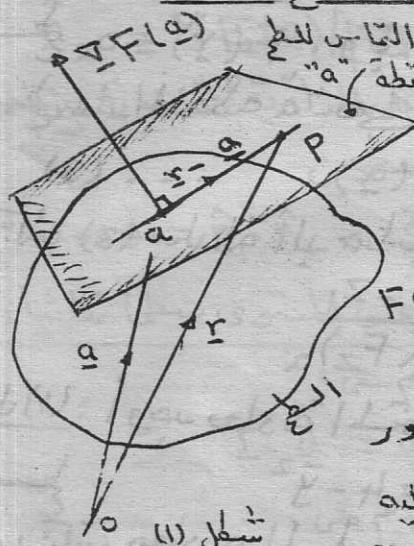
$$\lambda^2 F(\hat{\underline{b}}) + \lambda \hat{\underline{b}} \cdot \nabla F(\underline{a}) + F(\underline{a}) = 0$$

نحصل على المعادلة:

$$\lambda'^2 - 6\lambda' + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda' - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda' = 3, 3$$

- ٨٠ -

أى الخط المستقيم يقابل الخط في نقطتين منطبقتين احدياً (١١، ١١) أى أن الخط المستقيم على الخط الشائى عند النقطة (١١، ١١) (١١، ١١) (١١، ١١) : المستوى التماسى و العمودى للسطح الشائى :



نقرض أن النقطة "a" تقع على الخط الشائى $F(r) = 0$

ففى هذه الحالة نجد أن المعادلة (١١) بين (١٠-٥) تأخذ الصورة :

$$F(r) = 0 \quad \lambda^2 F(\hat{b}) + \lambda \hat{b} \cdot \nabla F(a) = 0$$

حيث النقطة "a" تحقق معادلة الخط أى أن $F(a) = 0$ - لاحظ أن أحد جذور

المعادلة الأخيرة يـا وى صفراً و عليه

فوجد أن الشرط اللازم لكن يـمى المستقيم

عند النقطة "a" $F(r) = 0$ الخط $r = a + \lambda \hat{b}$ هـ أن يكون الجذر الشائى للمعادلة $\lambda^2 F(\hat{b}) + \lambda \hat{b} \cdot \nabla F(a) = 0$ يجب أن يساوى صفراً أى أن

$$\hat{b} \cdot \nabla F(a) = 0 \quad \dots (1)$$

إذا كانت r هى متجه موضع أى نقطة على المستوى التماسى للسطح عند النقطة "a" فإن الشرط (١) يمكن كتابته على الصورة :

$$(r - a) \cdot \nabla F(a) = 0 \quad \dots (2)$$

المعادلة (2) هى أداة مقوى التماس للسطح عند النقطة "a" ويمكن كتابة المعادلة (2) بدلالة الإحداثيات المارتيزية كالآتى

$$(x - x_1)(F_x)_a + (y - y_1)(F_y)_a + (z - z_1)(F_z)_a = 0$$

حيث $a(x_1, y_1, z_1) \in P(x, y, z)$

يتضح لنا من المعادلة (1) أن $\nabla F(a) \perp \hat{p}$ وحيث أن $\hat{p}$ هو
الوحدة الموازي للمستوى المماس للسطح عند النقطة "a" فيكون
المستقيم $\nabla F(a)$ عمودي على المستوى المماس عند النقطة "a" على
السطح $F(x,y,z) = 0$. وبذلك تكون معادلة العمودي لهذا
السطح عند النقطة "a" هي

$$\underline{r} = \underline{a} + \lambda \nabla F(a) \quad \dots (3)$$

وتكتب (3) بدلالة الإحداثيات المائتية على النحو التالي:

$$\frac{x-x_1}{(F_x)_a} = \frac{y-y_1}{(F_y)_a} = \frac{z-z_1}{(F_z)_a}$$

مثال (1): أوجد معادلة المستوى المماس و الخط المتيقن العمودي
للسطح $z = 4 - y^2$ عند النقطة $a(2, 3, 1)$

الحل: نكتب معادلة السطح على الصورة

$$F(\underline{r}) = z + y^2 - 4 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\therefore \nabla F(\underline{r}) = (0, 2y, 1) \Rightarrow \nabla F(a) = (0, 2, 1)$$

معادلة المستوى المماس للسطح (1) عند النقطة "a" هي:

$$(2) \quad \dots \underline{r} \cdot (0, 2, 1) = 5 \Rightarrow (\underline{r} - (2, 3, 1)) \cdot (0, 2, 1) = 0$$

وأن معادلة الخط العمودي للسطح (1) عند النقطة "a" هي:

$$(3) \quad \dots \underline{r} = (2, 3, 1) + \lambda (0, 2, 1)$$

مثال (2): أوجد الزاوية المحصورة بين السطحين الشائعين:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \text{ و } z = x^2 + y^2 - 3$$

الحل: نكتب معادلتنا الصحين على الصورة

$$F_1(\underline{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \text{ و } F_2(\underline{r}) = x^2 + y^2 - z - 3$$

$$\therefore \nabla F_1(a) = (4, -2, 4) \text{ و } \nabla F_2(a) = (4, -2, -1)$$

∴ متجهما الوحدة العمودي للطح الدوه والثاني عند "a" على الترتيب هما :

$$\hat{n}_1 = \nabla F_1(a) / |\nabla F_1(a)| = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\hat{n}_2 = \nabla F_2(a) / |\nabla F_2(a)| = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

فإن الزاوية θ المحصورة بين الطحين هي الزاوية المحصورة بين العمودين أو المماسين إلى عند النقطة "a" على الطحين

$$\therefore \cos \theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \frac{8}{3\sqrt{21}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{8}{3\sqrt{21}} \right)$$

(١٤-٥) إيجاد الشرط اللازم لكي يمر المستوى سطحاً ثنائياً :

نفرض أن معادلة المستوى المعلوم هي :

$$\underline{r} \cdot \underline{\hat{d}} = d, \quad \underline{\hat{d}} \equiv (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3) \quad \dots (11)$$

وأن معادلة الطح الثاني المعلوم هي :

$$F(\underline{r}) = 0 \quad \dots (12)$$

وبما أن معادلة المستوى الذي يمر الطح (2) عند النقطة "a" التي تقع على الطح هي :

$$(\underline{r} - \underline{a}) \cdot \nabla F(\underline{a}) = 0 \quad \dots (13) \text{ أنظر (10-11) معادلة (2)}$$

فإذا كانت معادلة الطح (2) في صورته القارئينية أي على الصورة

$$F(\underline{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gyz + 2hzx + 2rx + 2sy + 2tz + \mu = 0$$

فإن

$$\nabla F(\underline{a}) \equiv (ax_1 + fy_1 + hz_1 + r; fx_1 + by_1 + gz_1 + s; hx_1 + gy_1 + cz_1 + t) \quad (a(x_1, y_1, z_1))$$

فإن شرط تطابق المتوئين (3) و (1) عند النقطة "a" هو :

$$\frac{ax_1+fy_1+hz_1+r}{\ell} = \frac{fx_1+by_1+gz_1+s}{m} = \frac{hx_1+gy_1+cz_1+t}{n} = \lambda$$

$$(i) \quad ax_1+fy_1+hz_1+r-\lambda\ell=0$$

$$(ii) \quad fx_1+by_1+gz_1+s-\lambda m=0$$

$$(iii) \quad hx_1+gy_1+cz_1+t-\lambda n=0$$

كذلك نجد أن النقطة "أ" تحقق معادلة المستوى (1) أي أن

$$(iv) \quad \ell x_1+m y_1+n z_1-d=0$$

إلى جانب ذلك يتحقق الشرط

$$(v) \quad \underline{a} \cdot \nabla F(\underline{a}) = \lambda d \Rightarrow rx_1+sy_1+tz_1+\mu-\lambda d=0$$

المعادلات (v) → (ii) الخمس في المجاهيل الأربعة λ, x_1, y_1, z_1 ، بحذف هذه المجاهيل من المعادلات الخمس وذلك باستخدام المحددات نحصل على الشرط المطلوب وهي تماس المستوى (1) مع الطح (2) عند النقطة "أ" ويكون على الصورة

$$\begin{vmatrix} a & f & h & r & \ell \\ f & b & g & s & m \\ h & g & c & t & n \\ r & s & t & \mu & -d \\ \ell & m & n & -d & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (4)$$

مثال: أوجد شرط تماس المستوى $\underline{r} \cdot \underline{\hat{d}} = d$ حيث $\underline{\hat{d}} = (\ell, m, n)$ مع الطح

$$F(\underline{r}) = ax^2+by^2+cz^2+\mu=0 \quad \text{عند النقطة } a(x_1, y_1, z_1)$$

الحل: نعوض في المحدد (4) بأخذ الصورة

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \ell \\ 0 & b & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & c & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -d \\ \ell & m & n & -d & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} + \frac{d^2}{\mu} = 0$$

وهذا هو الشرط المطلوب

(١٣-٥): معادلة المحل الرئيسي لجميع الإوتار سطح ثنائي والتي متصف كل منها بالنقطة "أ".

ولنفرض أن معادلة إحدى أوتار سطح $F(r) = 0$ هي:

$$r = a + \lambda \hat{p} \quad \dots (1)$$

وحيث أن النقطة "أ" هي منتصف الوتر (١) فإن للمعادلة

$$F(a + \lambda \hat{p}) = 0 \quad \dots (2)$$

من بند (١١-٥) نرى أن شرط وجود جذران متساويان للمعادلة (٢) هو

$$\hat{p} \cdot \nabla F(a) = 0 \quad \dots (3)$$

بحذف $\hat{p}$ بين المعادلتين (٣) و (١) نحصل على المعادلة:

$$(r - a) \cdot \nabla F(a) = 0 \quad \dots (4)$$

المعادلة (٤) هي معادلة المحل الرئيسي المطلوب وهي تمثل معادلة

مستوى يمر بالنقطة "أ" وعمودي عليه المتجه $\nabla F(a)$. فإذا

كانت $a(x_1, y_1, z_1)$ فإن صورة المعادلة (٤) التاريزية هي

$$(x - x_1)F_{x_1} + (y - y_1)F_{y_1} + (z - z_1)F_{z_1} = 0 \quad \dots (5)$$

ولنلاحظ أن المستوى (٤) يقطع السطح $F(r) = 0$ في قطع

مخروطي مركزه النقطة "أ" لذلك منتصف جميع أوتار القطع.

مثال: أوجد المحل الرئيسي لمتصفات مجموعة أوتار السطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

الحل: آتية معادلة هذا السطح على الصورة:

$$F(r) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \Rightarrow \nabla F(p_1) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2y_1}{b^2}, -\frac{2z_1}{c^2} \right)$$

حيث $p_1(x_1, y_1, z_1)$ هي منتصف إحدى هذه الأوتار. إذن

معادلة المحل الرئيسي للنقطة p_1 هي:

$$r \cdot \nabla F(p_1) = p_1 \cdot \nabla F(p_1) \Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

(١٤-٥): الحل الهندسي لمجموعة من الدوائر المتوازية للسطح الثاني:

نفرض أن "أ" منتصف أحد هذه الدوائر للسطح الثاني $F(r)=0$.
فإذا كان هذا الوتر يوازي اتجاه الوحد $\hat{u}$ حيث "أ" هي منتصفه
فترى من بند (١٣-٥) أن:

$$(1) \dots \nabla F(a) \cdot \hat{u} = 0$$

نفرض أن r هو قتيه موضع نقطة التنصيف لذي وتر لهذا
السطح من هذه الدوائر المتوازية للوتر الذي منتصفه النقطة "أ"
فتأخذ المعادلة (١) الصورة:

$$(2) \dots \nabla F(r) \cdot \hat{u} = 0$$

المعادلة (2) هي الحل الهندسي لمتصفات الدوائر المتوازية للوتر الذي
منتصفه النقطة "أ". هذا الحل الهندسي عبارة عن مستوى يعرف
بالمستوى القطري للسطح الثاني.

إذا كان المستوى القطري عمودي على الوتر الذي ينصفه
فإنه يعرف بالمستوى الأساسي أو الرئيسي.
فإذا كانت $\hat{u} = (l, m, n)$ وأن السطح معادلته هي:

$$F(r) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fx + 2gy + 2hz + 2rx + 2sy + 2tz + \mu = 0$$

فإن المعادلة (2) تأخذ الصورة:

$$(l, m, n) \cdot (ax + fy + hz + r, fx + by + g + s, hx + gy + cz + t)$$

$$\Rightarrow (al + fm + hn)x + (fl + bm + gn)y + (hl + gm + cn)z + rl + sm + tn = 0 \dots (3)$$

فإذا كانت المعادلة (3) تمثل المستوى الأساسي للسطح أى المستوى على $\hat{P}$ فينبغي أن :

$$\frac{a\ell + fm + hn}{\ell} = \frac{p\ell + bm + gn}{m} = \frac{h\ell + gm + cn}{n} = \lambda \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (a-\lambda)\ell + fm + hn &= 0 \\ f\ell + (b-\lambda)m + gn &= 0 \\ h\ell + gm + (c-\lambda)n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

يجذف ℓ, m, n بين مجموعة المعادلات (4) نحصل على

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & f & h \\ f & b-\lambda & g \\ h & g & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \dots (5)$$

يقال المحدد (5) نحصل على معادلة من الدرجة الثالثة فى λ تعرف بالتكعيبة المميزة ومجملها نحصل على ثلاث قيم للموسيط λ وبالتالى على قيم ℓ, m, n المناظرة ومنها تتعين المستويات الرئيسية الثلاث للسطح الثانى وذلك فى حالة قيم λ الحقيقية المختلفة.

مثال: أوجد المستويات الأساسية للسطح الثانى

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + 2zx - 2xy = 4$$

الحل: التكعيبة المميزة هنا تأخذ الصورة

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2, -2.$$

وسوف نوجد المستويات الأساسية لهذا السطح كالآتى:

$$(i) \lambda = 1: \xrightarrow[\text{نغوض (4)}]{\text{نغوض}} (\ell, m, n) = (1, 1, 1) / \sqrt{3}$$

وتكون معادلة المستوى الأساسى هنا هي: $x - y - z = 0$ (إدارا 1)

(ii) $\lambda = 2 \xrightarrow[\text{في (4)}]{\text{نعوض}}$ $(\ell, m, n) = (1, -1, 0) / \sqrt{2}$
وتكون معادلة المستوى الذاتي هي:

$$r \cdot (1, -1, 0) = 0$$

(iii) $\lambda = -2 \xrightarrow[\text{في (4)}]{\text{نعوض}}$ $(\ell, m, n) = (1, 1, -2) / \sqrt{6}$
وتكون معادلة المستوى الذاتي هي:

$$r \cdot (1, 1, -2) = 0$$

أمثلة توضيحية :

مثال (11) : أوجد معادلتا متوحي القياس المرسوم من المقياس

$$r \cdot (3, 4, 9) - 20 = 0 = r \cdot (1, 0, -3)$$

للسطح الثاني $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 10$. أوجد كذلك معادلة وتر القياس لهذا السطح .

الحل : معادلة أي مستوى مارا بالنقط المعض هي :

$$r \cdot (3 + \lambda, 4, 9 - 3\lambda) = 20 \quad \dots (1)$$

فإذا كان هذا المستوى مماسا للسطح المعطى عند النقطة (x_1, y_1, z_1) فإنه يكون مطابقا للمستوى

$$r \cdot (x_1, 4y_1, 9z_1) = 10 \quad \dots (2)$$

من شرط تلاقي المتوحيين (1) و (2) نجد أن

$$x_1 / (3 + \lambda) = y_1 = 3z_1 / (3 - \lambda) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (3 + \lambda) ; y_1 = \frac{1}{2} \quad \& \quad z_1 = \frac{1}{6} (3 - \lambda)$$

وتكون "نقطة" واقعة على السطح في تحقق معادلته أي أن

$$\frac{1}{4} (\lambda + 3)^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{36} (3 - \lambda)^2 = 10 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

وعليه فإن معادلتا متوحي القياس هما

$$(i) \lambda = 3 : r \cdot (3, 2, 0) = 10 \quad \& \quad (ii) \lambda = -3 : r \cdot (0, 2, 9) = 10$$

وذلك بالتعويض عن قيمة λ في (١)، وتكون نقطتا التماس هما

$$(0, \frac{1}{2}, 1) \text{ و } (3, \frac{1}{2}, 0) \text{ على التوالي}$$

معادلة وتر التماس هي عبارة عن معادلة الخط المماس المتيقن لواصل بين هاتين النقطتين أي أن معادلته هي:

$$\underline{r} = (3, \frac{1}{2}, 0) + \lambda'(3, 0, 1)$$

مثال (٤): أوجد معادلتا متواليا التماس وكذا معادلة وتر

التماس للسطح $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1$ المرسوم من المتيقن

$$\underline{r} = (1, 2, -1) + \lambda(2, 3, -2) \quad \text{هذا الخط}$$

الحل: اتبع نفس خطوات مثال (١).

مثال (٥): إذا قابل مستوى التماس للسطح $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{3} = 1$

محاور الإحداثيات ox, oy, oz في النقط A, B, C على التوالي فإثبت أن مركز $\triangle ABC$ يكون محله الهندسي هو الأصل

$$3/x^2 + 2/y^2 + 1/z^2 = 3$$

الحل: ولتكن $a(x_1, y_1, z_1)$ هي مركز المثلث ABC وعليه فإن إحداثيات

رؤسه هي $A(3x_1, 0, 0), B(0, 3y_1, 0), C(0, 0, 3z_1)$

وتكون معادلته هي:

$$[\underline{r}-\underline{A}, \underline{B}-\underline{A}, \underline{C}-\underline{A}] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-3x_1 & y & z \\ -3x_1 & 3y_1 & 0 \\ -3x_1 & 0 & 3z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3x_1}x + \frac{1}{3y_1}y + \frac{1}{3z_1}z = 1 \Rightarrow \underline{r} \cdot (\frac{1}{3x_1}, \frac{1}{3y_1}, \frac{1}{3z_1}) = 1 \quad (1)$$

فإذا كان (١) مماساً للسطح المعطى عند النقطة "a" فإن (١) يكافئ

$$\text{المستوى (2)} \dots \dots \dots (2) \dots \dots \dots = 1 \dots \dots \dots (x_1/9, y_1/6, z_1/3)$$

من شرط تطافئ المستويين (1) و (2) نجد أن $\frac{3}{x_1^2} = \frac{2}{y_1^2} = \frac{1}{z_1^2} = 1$ وعليه فإن النقطة Q تحقق معادلة المستويين.

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{6} + \frac{z_1^2}{3} = 1 \Rightarrow (x_1^2)^2 \frac{1}{9x_1^2} + (y_1^2)^2 \frac{1}{6y_1^2} + (z_1^2)^2 \frac{1}{3z_1^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(3)^2 \frac{1}{9x_1^2} + (2)^2 \frac{1}{6y_1^2} + (1)^2 \frac{1}{3z_1^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{3y_1^2} + \frac{1}{3z_1^2} = 1$$

أي أن المحل الهندسي للنقطة Q هو $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3y^2} + \frac{1}{3z^2} = 1$ تمازيت عامة *

1- أوجد معادلات المستوى المماس والعمود للطوع التالي عند النقط المذكورة:

- (i) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$; $(3, 4, -7)$
- (ii) $2xz^2 - 3xy = 4x + 7$; $(1, -1, 2)$
- (iii) $x^2 + 8y^2 + z^2 - 9yz + 14zx - 6xy - 6x - y + 4z = 2$; $(1, 2, 3)$

ج- أوجد المستويات الذاسية لكل من الطوع الذتيه:

- (i) $14(x^2 + y^2) + 8z^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 5x - 5y + 5 = 0$
- (ii) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx + 2xy + 2x + 12y + 10z + 20 = 0$
- (iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2zx - 2xy - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$

2- أوجد معادلتا مستويي التماس المرسوفة من المستقيم

للطوع التالي $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$

- (i) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$; (ii) $x^2/2a + y^2/2b = z$; (iii) $y^2 = 2ax$

3- أوجد معادلة المستوى المماس والعمودي للمستقيم

المعطى $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ التي توازي مستوى $(2, -1, 1) = 0$